МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

**Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского
Национальный исследовательский университет**

**Е.Л. Панкратов**

# НЕКОТОРЫЕ АНАЛИТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

Учебно-методическое пособие
по курсу «Математический анализ»

Рекомендовано методической комиссией Института экономики и предпринимательства ННГУ для студентов, обучающихся по специальности 08.05.01 «Экономическая безопасность»

Нижний Новгород
2017

УДК 517.958 (075)
ББК В311
П-16

П-16 Панкратов Е.Л.: НЕКОТОРЫЕ АНАЛИТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ. Учебно-методическое пособие. - Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2017. - 52 с.

Рецензент: доцент кафедры математики и теоретической механики НГСХА к.т.н., доцент **Ю.И. Никитин**

Учебно-методическое пособие «Некоторые аналитические методы решения дифференциальных уравнений в частных производных» подготовлено для ознакомления студентов, обучающихся по специальности 08.05.01 «Экономическая безопасность», с соответствующим разделом курса «Математический анализ». Оно содержит основные понятия теории дифференциальных уравнений и их интегральных аналогов, а также некоторые аналитические методы их решения. Для закрепления теоретических знаний по математическому анализу в данном пособии приведены контрольные задания.

Ответственная за выпуск:
председатель методической комиссии Института экономики и предпринимательства, **Е.Н. Летягина**.

УДК 517.958 (075)
ББК В311

# Содержание

# *ВВЕДЕНИЕ*

В настоящее время имеется большое количество экономических для описания которых необходимо решать дифференциальные уравнения. В рамках проведения такого моделирования необходимо решать как линейные, так и нелинейные дифференциальные уравнения с постоянными и переменными параметрами. В данном пособии приведен обзор методов решения дифференциальных уравнений с частными производными и их интегральных аналогов. Пособие ориентировано на развитие у студентов компетенций ПК-2, ПК-3, ПК-4 образовательного стандарта специальности 08.01.01 «Экономическая безопасность». В результате изучения раздела математики “Некоторые аналитические методы решения дифференциальных уравнений в частных производных” курса “Математический анализ” студенты должны знать основные понятия теории дифференциальных уравнений с частными производными и их интегральных аналогов, уметь решать дифференциальные уравнения с частными производными первого и высших порядков и их интегральные аналоги.

# Раздел 1. Классификация дифференциальных и интегральных уравнений

## 1.1. *Классификация дифференциальных уравнений*

Начнем рассмотрение методов решения уравнений математической физики с введения нескольких основных понятий.

Определение 1

Уравнение, связывающее независимые переменые $x_1$, $x_2$, …, $x_m$, искомую функцию независимых переменных $u(x_1,x_2,\ldots,x_m)$, заданной в некоторой области $G$, и частные производные функции $u(x_1,x_2,\ldots,x_m)$ до $n$-го порядка включительно называется дифференциальным уравнением в частных производных $n$-го порядка.

Определение 2

Порядком уравнения называется порядок старшей из входящих в уравнение производной.

Определение 3

Функция $u(x_1,x_2,\ldots,x_m)$, обращающая уравнение в частных производных в тождество, называется решением или интегралом данного уравнения.

Определение 4

Дифференциальное уравнение в частных производных называется линейным, если оно линейно относительно искомой функции $u(x_1,x_2,\ldots,x_m)$ и всех её производных. В противном случае уравнение называется нелинейным.

Пример 1

Линейное дифференциальное уравнение в частных производных первого порядка в общем случае имеет следующий вид:

$$A_1(x_1,x_2,...,x_m)\frac{\partial u(x_1,x_2,...,x_m)}{\partial x_1}+A_2(x_1,x_2,...,x_m)\frac{\partial u(x_1,x_2,...,x_m)}{\partial x_2}+...+ \tag{1}$$

$$+A_m(x_1,x_2,...,x_m)\frac{\partial u(x_1,x_2,...,x_m)}{\partial x_m}=B_0(x_1,x_2,...,x_m)+B_1(x_1,x_2,...,x_m)\,u(x_1,x_2,...,x_m).$$

Пример 2

Линейное дифференциальное уравнение в частных производных второго порядка в общем случае имеет следующий вид

$$A_{11}(x_1,x_2,...,x_m)\frac{\partial^2 u(x_1,x_2,...,x_m)}{\partial x_1^2}+A_{12}(x_1,x_2,...,x_m)\frac{\partial^2 u(x_1,x_2,...,x_m)}{\partial x_1\,\partial x_2}+$$

$$+A_{22}(x_1,x_2,...,x_m)\frac{\partial^2 u(x_1,x_2,...,x_m)}{\partial x_{12}^2}+...+A_{m-1m-1}(x_1,x_2,...,x_m)\frac{\partial^2 u(x_1,x_2,...,x_m)}{\partial x_{m-1}^2}+$$

$$+A_{m-1m}(x_1,x_2,...,x_m)\frac{\partial^2 u(x_1,x_2,...,x_m)}{\partial x_{m-1}\,\partial x_m}+A_{mm}(x_1,x_2,...,x_m)\frac{\partial^2 u(x_1,x_2,...,x_m)}{\partial x_{mm}^2}= \tag{2}$$

$$=B_0(x_1,x_2,...,x_m)+B_1(x_1,x_2,...,x_m)u(x_1,x_2,...,x_m)+B_2(x_1,x_2,...,x_m)\times$$

$$\times \frac{\partial u(x_1, x_2, ..., x_m)}{\partial x_1} + ... + B_{m+1}(x_1, x_2, ..., x_m)\frac{\partial u(x_1, x_2, ..., x_m)}{\partial x_m}.$$

Определение 5

Если коэффициенты $B_i(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ равны нулю, уравнения (1), (2) и аналогичные им уравнения более высокого порядка называются однородными. В противном случае данные уравнения называются неоднородным.

Для описания физических процессов наиболее часто используются уравнения в частных второго порядка. Данные уравнения, также как и уравнения первого порядка, могут быть классифицированы как “линейные” и “нелинейные”, “однородные” и “неоднородные”. Существует также ещё одна классификация уравнений второго порядка. Наиболее просто она может быть проиллюстрирована с помощью линейного относительно старших производных уравнения для функций двух переменных $u(x,t)$. Такое уравнение может быть представлено в следующем общем виде

$$A_{xx}(x,t)\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + 2A_{xt}(x,t)\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x \partial t} + A_{tt}(x,t)\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} =$$

$$= B\left(x, t, u(x,t), \frac{\partial u(x,t)}{\partial x}, \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right). \tag{3}$$

Определение 6

Уравнение (3) называется:

(*i*) гиперболическим, если $A_{xx}A_{tt}$-$A_{xt}^2$<0 (данное уравнение наиболее часто используется для описания волновых процессов);

(*ii*) параболическим, если $A_{xx}A_{tt}$-$A_{xt}^2$=0 (данное уравнение наиболее часто используется для описания теплопереноса и диффузии вещества);

(*iii*) эллиптическим, если $A_{xx}A_{tt}$-$A_{xt}^2$>0 (используется для описания стационарных процессов).

С помощью замены переменных данные уравнения можно преобразовать к следующим каноническим формам

канонические формы гиперболических уравнений

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x \partial t} = U\left(x, t, u(x,t), \frac{\partial u(x,t)}{\partial x}, \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right); \tag{3а}$$

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = U\left(x, t, u(x,t), \frac{\partial u(x,t)}{\partial x}, \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right); \tag{3б}$$

каноническая форма параболического уравнения

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = U\left(x, t, u(x,t), \frac{\partial u(x,t)}{\partial x}, \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right); \tag{3в}$$

каноническая форма эллиптического уравнения

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}=U\left(x,t,u(x,t),\frac{\partial u(x,t)}{\partial x},\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right). \tag{3г}$$

### 1.2. *Классификация краевых условий для уравнений второго порядка*

Рассмотрим функцию двух переменных $u(x,t)$ в некоторой области $(x,t)\in G$: $0\le x\le L$, $0\le t\le\Theta$.

Определение 7

Совокупность начального и граничного условий называется краевыми условиями. Начальное условие называется временным краевым условием, а граничное условие называется пространственным краевым условием.

Начальное условие

Начальное условие определяется заданием распределения искомой функции $u(x,t)$ и ее производной до $m$-1 порядка ($m$ – порядок уравнения, решением которого является искомая функция $u(x,t)$) внутри области $G$ в начальный момент времени, т.е.

$$u(x,0)=\chi_0(x),\ \left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right|_{t=0}=\chi_1(t),\ \ldots,\ \left.\frac{\partial^{m-1} u(x,t)}{\partial t^{m-1}}\right|_{t=0}=\chi_{m-1}(t). \tag{4}$$

Существуют несколько видов граничных условий для искомой функции.

Граничное условие первого рода (задача Дирихле)

Граничное условие первого рода (задача Дирихле) состоит в задании на границах области $G$ искомой функции $u(x,t)$ в любой момент времени, т.е.

$$u(0,t)=\varphi_1(0,t),\ u(L,t)=\varphi_2(L,t). \tag{4а}$$

Такие граничные условия могут быть реализованы при искусственном поддержании постоянной концентрации легирующей примеси или температуры, а также особыми условиями массо- или теплообмена между границей области $G$ и окружающим пространством.

Граничное условие второго рода (задача Неймана)

Граничное условие второго рода (задача Неймана) состоит в задании на границе области $G$ плотности потока тепла, частиц, … При этом поток пропорционален нормальной производной искомой функции $u(x,t)$

$$-\lambda\left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial n}\right|_{x=0}=\psi_1(t),\ -\lambda\left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial n}\right|_{x=L}=\psi_2(t). \tag{4б}$$

В данном соотношении нормальная производная $\frac{\partial u(x,t)}{\partial n}$ искомой функции $u(x,t)$, имеющая смысл концентрации вещества или температуры, после умножения на коэффициент $\lambda$, имеющий смысл соответственно коэффициентов диффузии или теплопроводности, является потоком соответственно вещества или тепла через поверхность $G$. Такие граничные условия используются при теплообмене во время нагревания тела в высокотемпературных печах, где передача тепла происходит при помощи излучения по закону Стефана-Больцмана, когда температура тела значительно меньше температуры излучающих поверхностей. Второй пример реализации граничных условий второго рода – протекание частиц через границу области *G* с заданным потоком.

Граничное условие третьего рода (задача Ньютона)

Обычно граничные условия третьего рода характеризуют конвективный теплообмен между поверхностью тела и окружающей средой в процессе нагревания и охлаждения тела. Данный закон достаточно сложен, но в упрощенном виде может быть принят в виде закона Ньютона. В рамках данного закона поток тепла через поверхность тела пропорционален разности температур данного тела и окружающей среды, т.е.

$$-\lambda \left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial n}\right|_{x=0} = \alpha\left[u(0,t)-T_L(t)\right],\; -\lambda \left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial n}\right|_{x=L} = \alpha\left[u(L,t)-T_R(t)\right]. \qquad (4с)$$

В данном соотношении параметр $\alpha$ имеет смысл коэффициента теплообмена. Частным случаем третьей краевой задачи является закон Стефана-Больцмана. В рамках данного закона тепловой поток через границу от температуры пропорционален разности четвёртых степеней температур тела и окружающей среды.

Граничное условие четвертого рода

Граничное условие четвёртого рода соответствует массо- и теплообмену поверхности тела с окружающей средой (например, с другим телом). При этом обычно считаетя, что концентрация вещества или температура (в зависимости от рассматриваемой с физической точки зрения ситуации), а также поток вещества или тепла сохраняются с точностью до известного множителя при переходе через границу раздела, т.е.

$$k(t)\,u_1(x,t)\big|_{S_1} = u_2(x,t)\big|_{S_2},\; -D_1 \left.\frac{\partial u_1(x,t)}{\partial n}\right|_{S_1} = -D_2 \left.\frac{\partial u_2(x,t)}{\partial n}\right|_{S_2}. \qquad (4г)$$

### 1.3. Переход от дифференциальной формы уравнений к интегральной

Дифференциальное уравнение может быть преобразовано к интегральному. Рассмотрим два способа такого преобразования. В качестве примера рассмотрим обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка

$$a_2(x)\frac{d^2 y(x)}{d x^2} + a_1(x)\frac{d\,y(x)}{d\,x} + a_0(x)y(x) = b(x), \qquad (5)$$

где $y(x)$ – искомая функция, $a_i(x)$ и $b(x)$ – известные функции независимой переменной $x$. В рамках первого метода перехода от дифференциального уравнения к интегральному сделаем в уравнении (5) следующую замену переменных: $z(x) = \dfrac{d^2 y(x)}{d x^2}$ [1]. Тогда производная $\dfrac{d\,y(x)}{d\,x}$ является интегралом от новой функции $z(x)$, т.е. $\frac{d\,y(x)}{d\,x}=\int\limits_0^x z(v)d\,v+C_1$, где $C_1$ – постоянная интегрирования. Искомая функция $y(x)$ является двухкратным интегралом от функции $z(x)$, т.е. $y(x)=\int\limits_0^x\int\limits_0^v z(u)d\,u\,d\,v+C_1x+C_2$, где $C_2$ – вторая постоянная интегрирования. С помощью интегрирования по частям [16] последнее соотношение можно свести к однократному интегралу: $y(x)=\int\limits_0^x(x-v)z(v)\,d\,v+C_1x+C_2$. После проведения такой замены переменных уравнение (5) преобразуется к следующему виду

$$a_2(x)z(x)+a_1(x)\left[\int\limits_0^x z(v)d\,v+C_1\right]+a_0(x)\left[\int\limits_0^x(x-v)z(v)\,d\,v+C_1x+C_2\right]=b(x). \quad (5a)$$

Постоянные интегрирования $C_1$ и $C_2$ определяются с помощью наложенных на решение условий. Уравнение (5*a*) является интегральным уравнением относительно старшей производной искомой функции. После определения функции $z(x)$ ее необходимо проинтегрировать необходимое число раз (в данном случае – два раза) для определения исходной искомой функции $y(x)$.

В рамках второго метода перехода от дифференциальной формы уравнения к интегральной проинтегрируем правую и левую части уравнения (5) по независимой переменной $x$. Тогда уравнение (5) преобразуется к следующей форме

$$\int\limits_0^x a_2(v)\frac{d^2y(v)}{d\,v^2}d\,v+\int\limits_0^x a_1(v)\frac{d\,y(v)}{d\,v}d\,v+\int\limits_0^x a_0(v)y(v)d\,v=\int\limits_0^x b(v)d\,v+C_1.$$

Первые два слагаемых уравнения (5*б*) могут быть преобразованы к более простому виду использованием интегрирования по частям, т.е.

$$a_2(x)\frac{d\,y(x)}{d\,x}-\int\limits_0^x\frac{d\,a_2(v)}{d\,v}\frac{d\,y(v)}{d\,v}d\,v+a_1(x)y(x)-\int\limits_0^x y(v)\frac{d\,a_1(v)}{d\,v}d\,v+$$

$$+\int\limits_0^x a_0(v)y(v)d\,v=\int\limits_0^x b(v)d\,v+C_1.$$

Повторное применение интегрирования по частям во втором слагаемом позволяет преобразовать интегро-дифференциальное уравнение в интегральное

$$a_2(x)\frac{d\,y(x)}{d\,x}-\frac{d\,a_2(x)}{d\,x}y(x)+\int\limits_0^x\frac{d^2a_2(v)}{d\,v^2}y(v)d\,v+a_1(x)y(x)-\int\limits_0^x y(v)\frac{d\,a_1(v)}{d\,v}d\,v+$$

$$+\int\limits_0^x a_0(v)y(v)d\,v=\int\limits_0^x b(v)d\,v+C_1.$$

Или, после приведения подобных членов

$$a_2(x)\frac{d\,y(x)}{d\,x}+\left[a_1(x)-\frac{d\,a_2(x)}{d\,x}\right]y(x)+\int\limits_0^x\left[\frac{d^2a_2(v)}{d\,v^2}-\frac{d\,a_1(v)}{d\,v}+a_0(v)\right]y(v)d\,v=$$

$$=\int_0^x b(v)\,dv + C_1 .$$

Повторное интегрирование последнего соотношения является предпоследним шагом в преобразовании его из интегро-дифференциальной формы к интегральной, т.е.

$$\int_0^x a_2(v)\frac{d\,y(v)}{d\,v}d\,v+\int_0^x\left[a_1(v)-\frac{d\,a_2(v)}{d\,v}\right]y(v)d\,v+\int_0^x\left[\frac{d^2a_2(v)}{d\,v^2}-\frac{d\,a_1(v)}{d\,v}+a_0(v)\right]\times$$

$$\times(x-v)y(v)d\,v=\int_0^x(x-v)\,b(v)\,d\,v+C_1x+C_2 .$$

Применение интегрирования по частям к первому слагаемому и приведение подобных членов в последнем уравнении позволяет получить второй интегральный аналог уравнения (5)

$$a_2(x)y(x)+\int_0^x\left\{a_1(v)-2\frac{d\,a_2(v)}{d\,v}+(x-v)\left[\frac{d^2a_2(v)}{d\,v^2}-\frac{d\,a_1(v)}{d\,v}+a_0(v)\right]\right\}y(v)d\,v=$$

$$=\int_0^x(x-v)b(v)d\,v+C_1x+C_2 . \qquad (5б)$$

Введение обозначений

$$\widetilde{a}_1(v)=a_1(v)-2\frac{d\,a_2(v)}{d\,v}+(x-v)\left[\frac{d^2a_2(v)}{d\,v^2}-\frac{d\,a_1(v)}{d\,v}+a_0(v)\right],$$

$$b(x)=\int_0^x(x-v)b(v)d\,v+C_1x+C_2$$

позволяет преобразовать второй интегральный аналог уравнения (5) к окончательному виду

$$a_2(x)y(x)+\int_0^x\widetilde{a}_1(v)y(v)d\,v=\widetilde{b}\,(x). \qquad (5в)$$

## 1.4. *Классификация интегральных уравнений*

Существуют две основных группы интегральных уравнений: уравнения Вальтера и уравнения Фредгольма. В рамках каждой группы выделяются два рода уравнений: первый и второй. Общий вид перечисленных уравнений приведен ниже. Уравнения Вальтера соответственно первого и второго рода выглядят следующим образом:

$$\lambda\int_a^x K(x,t)y(t)d\,t=f(x), \qquad (6а)$$

$$y(x)=f(x)+\lambda\int_a^x K(x,t)y(t)d\,t , \qquad (6б)$$

где $y(x)$ - искомая функция, $f(x,t)$ и $K(x,t)$ - известные функции, вторая из которых называется ядром интегрального уравнения.

Уравнения Фредгольма соответственно первого и второго рода имеют вид

$$\int_a^b K(x,t)\,y(t)\,dt = f(x), \tag{7а}$$

$$y(x) - \int_a^b K(x,t)\,y(t)\,dt = f(x). \tag{7б}$$

Если $f(x) = 0$, уравнения (6) и (7) называются однородными. В противном случае - неоднородными.

# Раздел 2. Решение дифференциальных уравнений с частными производными первого порядка

Из дифференциальных уравнений в частных производных наиболее просто решаются уравнения первого порядка. Рассмотрим методы их решения.

### 2.1. *Однородные уравнения*

Рассмотрим линейное однородное дифференциальное уравнение в частных производных первого порядка, т.е.

$$A_1(x_1,x_2,...,x_m)\frac{\partial u(x_1,x_2,...,x_m)}{\partial x_1}+A_2(x_1,x_2,...,x_m)\frac{\partial u(x_1,x_2,...,x_m)}{\partial x_2}+...+$$

$$+A_m(x_1,x_2,...,x_m)\frac{\partial u(x_1,x_2,...,x_m)}{\partial x_m}=0\,. \tag{1a}$$

Составим следующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений [17]

$$\frac{d\,x_1}{A_1(x_1,x_2,...,x_m)}=\frac{d\,x_2}{A_2(x_1,x_2,...,x_m)}=...=\frac{d\,x_m}{A_m(x_1,x_2,...,x_m)}\,. \tag{8}$$

Общий интеграл данной системы $u_1(x_1,x_2,\dots,x_m)=C_1$, $u_2(x_1,x_2,\dots,x_m)=C_2$, …, $u_{m\text{-}1}(x_1,x_2,\dots,x_m)=C_{m\text{-}1}$ даёт общее решение уравнения (1$a$) в следующем виде:

$$u(x_1,x_2,\dots,x_m)=U(u(x_1,x_2,\dots,x_m),u(x_1,x_2,\dots,x_m),\dots,u(x_1,x_2,\dots,x_m)).$$

Приведенный выше общий интеграл определяет семейство кривых, называемых характеристиками.

<u>Пример 3</u>

Рассмотрим уравнение

$$x\frac{\partial u(x,y,z)}{\partial x}+y\frac{\partial u(x,y,z)}{\partial y}+z\frac{\partial u(x,y,z)}{\partial z}=0\,. \tag{9}$$

Соответствующая система обыкновенных дифференциальных уравнений имеет вид

$$\frac{d\,x}{x}=\frac{d\,y}{y}=\frac{d\,z}{z}.$$

Данная система имеет два независимых интеграла

$$\varphi_1(x,y,z)=\frac{y}{x}=C_1,\ \varphi_2(x,y,z)=\frac{z}{x}=C_2,$$

где $C_1$ и $C_2$ – постоянные интегрирования. Таким образом, общим решением уравнения (3) является произвольная функция следующих аргументов

$$u(x,y,z)=F\left(\frac{y}{x},\frac{z}{x}\right). \tag{10}$$

Подставим полученное решение (10) в уравнение (9). В результате такой подстановки получаем

$$x\cdot\frac{\partial u(x,y,z)}{\partial\left(\frac{y}{x}\right)}\cdot\frac{\partial\left(\frac{y}{x}\right)}{\partial x}+x\cdot\frac{\partial u(x,y,z)}{\partial\left(\frac{z}{x}\right)}\cdot\frac{\partial\left(\frac{z}{x}\right)}{\partial x}+y\cdot\frac{\partial u(x,y,z)}{\partial\left(\frac{y}{x}\right)}\cdot\frac{\partial\left(\frac{y}{x}\right)}{\partial y}+\frac{\partial u(x,y,z)}{\partial\left(\frac{z}{x}\right)}\cdot$$

$$\cdot y\cdot\frac{\partial\left(\frac{z}{x}\right)}{\partial y}+z\cdot\frac{\partial u(x,y,z)}{\partial\left(\frac{y}{x}\right)}\cdot\frac{\partial\left(\frac{y}{x}\right)}{\partial z}+z\cdot\frac{\partial u(x,y,z)}{\partial\left(\frac{z}{x}\right)}\cdot\frac{\partial\left(\frac{z}{x}\right)}{\partial z}=0.$$

Вычисление в последнем соотношении частных производных, являющихся вторыми множителями в каждом из слагаемых, позволяет получить

$$-x\cdot\frac{y}{x^2}\cdot\frac{\partial u(x,y,z)}{\partial\left(\frac{y}{x}\right)}-x\cdot\frac{z}{x^2}\cdot\frac{\partial u(x,y,z)}{\partial\left(\frac{z}{x}\right)}+y\cdot\frac{1}{x}\cdot\frac{\partial u(x,y,z)}{\partial\left(\frac{y}{x}\right)}+0+0+$$

$$+z\cdot\frac{1}{x}\cdot\frac{\partial u(x,y,z)}{\partial\left(\frac{z}{x}\right)}=0.$$

Приведение подобных членов в данном соотношении показывает, что функция (10) является решением уравнения (9).

Пример 4

Рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}=\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}. \qquad (11)$$

Соответствующее уравнению (11) обыкновенное дифференциальное уравнение в симметрической форме имеет вид

$$\frac{dx}{1}=\frac{dy}{-1}.$$

Его общим интегралом является следующая функция

$$\varphi(x,y)=x+y=c,$$

где $c$ – постоянная интегрирования. Таким образом, общим решением уравнения (5) является произвольная функция следующих аргументов

$$u(x,y)=F(x+y).$$

Подстановка полученного решения в исходное дифференциальное уравнение и приведение подобных членов подтверждает правильность его нахождения.

## 2.2. *Неоднородные уравнения*

Рассмотрим линейное неоднородное дифференциальное уравнение в частных производных первого порядка, т.е. уравнение (1). В данном случае будем искать решение в неявном виде: $U(x_1,x_2,\ldots,x_m,u(x_1,x_2,\ldots,x_m))=0$. Решение уравнения (1) может быть определено из следующего уравнения [17]

$$A_1(x_1,...,x_m)\frac{\partial U(x_1,...,x_m,u(x_1,...,x_m))}{\partial x_1}+\frac{\partial U(x_1,...,x_m,u(x_1,...,x_m))}{\partial x_2}\times$$

$$\times A_2(x_1,...,x_m)+...+A_m(x_1,...,x_m)\frac{\partial u(x_1,...,x_m)}{\partial x_m}+\frac{\partial U(x_1,...,x_m,u(x_1,...,x_m))}{\partial u}\times$$

$$\times\left[B_1(x_1,...,x_m)+B_2(x_1,...,x_m)\,u(x_1,...,x_m)\right]=0\,. \qquad (12)$$

Методика решения данного уравнения совпадает с методикой решения однородного уравнения. Добавляется лишь одно обыкновенное дифференциальное уравнение. Составим следующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_1}{A_1(x_1,x_2,...,x_m)}=\frac{dx_2}{A_2(x_1,x_2,...,x_m)}=...=\frac{dx_m}{A_m(x_1,x_2,...,x_m)}=$$

$$=\frac{du}{B_1(x_1,...,x_m)+B_2(x_1,...,x_m)\,u(x_1,...,x_m)}. \qquad (13)$$

Далее найдём характеристики данной системы уравнений и определим решение исходного неоднородного дифференциального уравнения.

Пример 5

Рассмотрим уравнение

$$4x\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}+3y\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}=2u(x,y). \qquad (14)$$

Преобразуем его к виду

$$4x\frac{\partial U(x,y,u(x,y))}{\partial x}+3y\frac{\partial U(x,y,u(x,y))}{\partial y}+2\frac{\partial U(x,y,u(x,y))}{\partial u}=0\,.$$

Далее запишем соответствующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{4x}=\frac{dy}{3y}=\frac{du}{2u}\,.$$

Данная система имеет следующие интегралы

$$C_1=\frac{u(x,y)}{\sqrt{x}},\ C_2=\frac{u(x,y)}{\sqrt[3]{y}}\,.$$

Таким образом, решение уравнения (8) в неявной форме имеет следующий вид

$$U\left(\frac{u(x,y)}{\sqrt{x}},\frac{u(x,y)}{\sqrt[3]{y}}\right)=0\,.$$

### 2.3. *Нелинейные уравнения*

Рассмотрим нелинейное уравнение в частных производных первого порядка в случае двух независимых переменных [17]

$$U\left(x,y,u(x,y),\frac{\partial u(x,y)}{\partial x},\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}\right)=0\,,$$

$$U\left(x,y,u(x,y),\frac{\partial u(x,y)}{\partial x},\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}\right)=0\,, \tag{15}$$

где $u(x,y)$ - искомая функция от $x$ и $y$, $U$ - заданная непрерывно- дифференцируемая функция своих аргументов, нелинейно зависящая от искомой функции $u(x,y)$ и ее производных $\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}$ и $\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}$. Часто задача интегрирования одного уравнения является более трудной, чем интегрирование системы двух совместных уравнений

$$\begin{cases} U_1\left(x,y,u(x,y),\dfrac{\partial u(x,y)}{\partial x},\dfrac{\partial u(x,y)}{\partial y}\right)=0 \\ U_2\left(x,y,u(x,y),\dfrac{\partial u(x,y)}{\partial x},\dfrac{\partial u(x,y)}{\partial y}\right)=0. \end{cases} \tag{15а}$$

Пусть систему (15*а*) можно разрешить относительно производных $\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}$ и $\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}$, т.е.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u(x,y)}{\partial x}=A(x,y,u(x,y)) \\ \dfrac{\partial u(x,y)}{\partial y}=B(x,y,u(x,y)), \end{cases} \tag{15б}$$

где $A(x,y,u(x,y))$ и $B(x,y,u(x,y))$ - непрерывно дифференцируемые функции. Следует заметить, что дифференцирование первого уравнения системы (15*б*) по $y$, а второго по $x$ позволяет сформулировать условие совместности в следующей форме

$$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y\partial x}=\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x\partial y}\,.$$

Данное условие позволяет получить

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y \partial x} = \dfrac{\partial A(x,y,u(x,y))}{\partial y} = \dfrac{\partial A(x,y,u(x,y))}{\partial y} + \dfrac{\partial A(x,y,u(x,y))}{\partial u} B \\ \dfrac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial B(x,y,u(x,y))}{\partial x} = \dfrac{\partial B(x,y,u(x,y))}{\partial x} + \dfrac{\partial B(x,y,u(x,y))}{\partial z} A. \end{cases}$$

Два последних соотношения позволяют получить необходимое условие совместности системы (15*б*) в окончательной форме

$$\frac{\partial A(x,y,u(x,y))}{\partial y} + \frac{\partial A(x,y,u(x,y))}{\partial u} B(x,y,u(x,y)) =$$

$$= \frac{\partial B(x,y,u(x,y))}{\partial x} + \frac{\partial B(x,y,u(x,y))}{\partial z} A(x,y,u(x,y)). \quad (16)$$

Решение данного типа уравнений проиллюстрируем на следующем примере.

Пример 6

Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u(x,y)}{\partial x} = 2x^2 + 2xu(x,y) + 2xy^2 - 1 \\ \dfrac{\partial u(x,y)}{\partial y} = -2y. \end{cases} \quad (17)$$

Проверка условия совместности позволяет получить:

$$4xy + 2x(-2y) = 0 + 0 \cdot [2x^2 + 2xu(x,y) + 2xy^2 - 1].$$

Данное уравнение выполняется тождественно. По этой причине система (17) интегрируема. Первое уравнение системы (17) проинтегрируем по $x$, фиксируя $y$. Тогда получаем

$$u(x,y) = e^{x^2} \left\lfloor C(y) + \int (2x^2 + 2xy^2 - 1) e^{-x^2} dx \right\rfloor,$$

где $C(y)$ – произвольная непрерывно дифференцируемая функция переменной $y$. Интеграл в последнем соотношении разбиением на сумму трёх интегралов, применением методов интегрирования по частям и усложнения дифференциала можно привести к следующему виду

$$\int (2x^2 + 2xy^2 - 1) e^{-x^2} dx = 2\int x^2 e^{-x^2} dx - 2y^2 e^{-x^2} - \int e^{-x^2} dx =$$

$$= -xe^{-x^2} + \int e^{-x^2} dx - 2y^2 e^{-x^2} - \int e^{-x^2} dx = -(y^2 + x) e^{-x^2}.$$

Таким образом, можно получить

$$u(x,y) = C(y) e^{x^2} - y^2 - x.$$

Выберем функцию $C(y)$ таким образом, чтобы удовлетворялось бы второе уравнение. Дифференцируя полученное из первого уравнения системы (17) решение, получаем

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = \frac{d\,C(y)}{d\,y} e^{x^2} - 2\,y\,.$$

Сравнение последнее уравнение со вторым уравнением системы (17) приводит к следующему результату

$$\frac{d\,C(y)}{d\,y} e^{x^2} - 2\,y = -2y\,.$$

Тогда

$$\frac{d\,C(y)}{d\,y} = 0\,,$$

т.е.

$$C(y) = const.$$

Решение системы (11) в окончательной форме имеет вид

$$u(x,y) = const \cdot e^{x^2} - y^2 - x\,.$$

# Раздел 3. Решение дифференциальных уравнений с частными производными второго порядка

## 3.1. *Метод разделения переменных*

### 3.1.1. Линейное однородное параболическое уравнение

Рассмотрим линейное однородное параболическое уравнение

$$c\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left[\lambda\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right]. \tag{18}$$

Физические трактовки решения данного уравнения - концентрация диффундирующего вещества или температура, а уравнение (18) в зависимости от физической трактовки решения называется уравнением диффузии или теплопроводности. Коэффициент $c$ имеет смысл соответственно коэффициента пористости (отношение объёма пор в материале к общему объёму материала) или теплоёмкости, а коэффициент $\lambda$ имеет смысл соответственно коэффициента диффузии или коэффициента теплопроводности. Отношение коэффициента теплопроводности и теплоёмкости $\lambda / c$ называется коэффициентом температуропроводности. Если коэффициенты $\lambda$ и $c$ постоянны (а именно такой случай мы и будем пока рассматривать), тогда уравнение (18) примет следующий вид

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}=D\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}. \tag{18a}$$

В данном уравнении введено обозначение $D=\lambda / c$. Дополним уравнение (18$a$) следующими граничными и начальным условиями

$$\left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right|_{x=0}=\left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right|_{x=L}=0,\ u(x,0)=\chi(x).$$

Будем искать решение уравнения (18$a$) в виде произведения двух множителей, один из которых зависит только от пространственной переменной $x$, другой – только от времени $t$, т.е. $u(x,t)=A(x)\,B(t)$ [18]. Подставим предлагаемую форму решения в уравнение (18$a$)

$$A(x)\frac{\partial B(t)}{\partial t}=D\,B(t)\frac{\partial^2 A(x)}{\partial x^2}.$$

Далее перенесём в одну часть уравнения все множители, зависящие от одной переменной, в другую часть уравнения - все множители, зависящие от другой переменной, т.е.

$$\frac{1}{B(t)}\frac{d\,B(t)}{d\,t}=\frac{D}{A(x)}\frac{d^2 A(x)}{d\,x^2}.$$

Последнее равенство может выполняться только в том случае, когда его правая и левая части равны неопределённой пока постоянной величине

$$\frac{1}{B(t)}\frac{d\,B(t)}{d\,t}=\frac{D}{A(x)}\frac{d^2A(x)}{d\,x^2}=\gamma\,.$$

Тогда получаем систему уравнений для функций $A(x)$ и $B(t)$

$$\frac{1}{B(t)}\frac{d\,B(t)}{d\,t}=\gamma\,,\ \frac{D}{A(x)}\frac{d^2A(x)}{d\,x^2}=\gamma\,. \tag{19}$$

Решим первое уравнение системы (19) методом разделения переменных [2,3]. Для использования данного метода умножим левую и правую часть данного уравнения на $dt$, что приводит данное соотношение к следующему виду

$$\frac{d\,B(t)}{B(t)}=\gamma\,d\,t\,.$$

Интегрирование левой и правой части данного уравнения с использованием таблицы интегралов (см., например, [16,17]) позволяет получить следующее решение первого уравнения системы (19)

$$ln[B\,(t)]=\gamma t+C_1.$$

Потенцирование данного соотношения дает функцию $B(t)$ в явном виде

$$B\,(t)=C_1e^{\gamma t}.$$

Постоянная $\gamma$ из условия физической реализуемости решения должна быть выбрана отрицательной, т.е. $\gamma=-|\gamma|$. В противном случае решение уравнения (18*a*) будет неограниченно возрастать во времени. Второе уравнение системы (19) может быть преобразовано к виду

$$\frac{d^2A(x)}{d\,x^2}=\frac{\gamma}{D}A(x),$$

что эквивалентно следующему уравнению

$$\frac{d^2A(x)}{d\,x^2}+\frac{|\gamma|}{D}A(x)=0\,.$$

Далее в рамках метода Эйлера подстановка $A\,(x)=C\,e^{\lambda\,x}$ позволяет получить следующее уравнение для параметра $\lambda$

$$\lambda^2+|\gamma|/D=0.$$

Тогда

$$\lambda=\pm i\,x\sqrt{|\gamma|/D}\,,$$

где $i=\sqrt{-1}$.

С учётом последних соотношений функция $A\,(x)$ может быть представлена в двух эквивалентных формах

$$A(x)=C_2\exp\left(i\,x\sqrt{\frac{|\gamma|}{D}}\right)+C_3\exp\left(-i\,x\sqrt{\frac{|\gamma|}{D}}\right)\ \text{и}\ A(x)=C_4\cos\left(x\sqrt{\frac{|\gamma|}{D}}\right)+C_5\sin\left(x\sqrt{\frac{|\gamma|}{D}}\right).$$

Вторая форма является более предпочтительной, т.к. с её помощью определение постоянных интегрирования является более удобной. Решение уравнения (18*a*) в окончательной форме имеет следующий вид

$$u(x,t)=\left[C_6\cos\left(x\sqrt{\frac{|\gamma|}{D}}\right)+C_7\sin\left(x\sqrt{\frac{|\gamma|}{D}}\right)\right]e^{-|\gamma|\,t}, \tag{20}$$

где $C_6=C_1C_4$, $C_7=C_1C_5$. Далее определим неизвестные пока постоянные величины $C_6$, $C_7$ и $\gamma$. Для этого найдём частную производную по переменной $x$ от функции (20)

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}=\left[-C_6\sqrt{\frac{|\gamma|}{D}}\sin\left(x\sqrt{\frac{|\gamma|}{D}}\right)+C_7\sqrt{\frac{|\gamma|}{D}}\cos\left(x\sqrt{\frac{|\gamma|}{D}}\right)\right]e^{-|\gamma|\,t}.$$

Подстановка граничных значений переменной $x$ приводит к следующим результатам

при $x=0$: $$\left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right|_{x=0}=C_7\sqrt{\frac{|\gamma|}{D}}\cos\left(x\sqrt{\frac{|\gamma|}{D}}\right)e^{-|\gamma|\,t}$$

при $x=L$: $$\left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right|_{x=L}=\left[-C_6\sqrt{\frac{|\gamma|}{D}}\sin\left(L\sqrt{\frac{|\gamma|}{D}}\right)+C_7\sqrt{\frac{|\gamma|}{D}}\cos\left(L\sqrt{\frac{|\gamma|}{D}}\right)\right]e^{-|\gamma|\,t}.$$

Равенство нулю производной $\dfrac{\partial u(x,t)}{\partial x}$ на границах рассматриваемой области позволяет получить из первого уравнения данной системы, что оно может удовлетворяться только при равенстве нулю постоянной интегрирования $C_7$. Остальные множители производной или не равны нулю, или равны нулю только в некоторых точках. Равенство нулю постоянной $C_7$ приводит второе уравнение последней системы к следующему виду

при $x=L$: $$\left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right|_{x=L}=-C_6\sqrt{\frac{|\gamma|}{D}}\sin\left(L\sqrt{\frac{|\gamma|}{D}}\right)e^{-|\gamma|\,t}.$$

Данное соотношение может быть равно нулю или при $\sin\left(L\sqrt{|\gamma|/D}\right)=0$, или при $C_7=0$. Однако второе равенство приводит к нулевому решению уравнения (18*a*), что интереса не представляет. Решение уравнения $\sin\left(L\sqrt{|\gamma|/D}\right)=0$ позволяет получить: $|\gamma|=D\,\pi^2n^2/L^2$, $n=0, 1, 2, \ldots$ Таким образом, уравнение (18*a*) имеет бесконечное число решений. Числа $\pi n/L$ называются <u>собственными числами.</u> Соответствующие им ненулевые (нетривиальные) решения называются <u>собственными функциями</u>. Задача на нахождение собственных чисел и собственных решений называется задачей Штурма-Лиувиля. Формально составим ряд из этих решений

$$u(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty} C_{n6}\cos\left(\frac{\pi n x}{L}\right)e^{-\frac{\pi^2 n^2}{L^2}Dt}. \tag{21}$$

Для определения постоянных интегрирования $C_{6n}$ воспользуемся начальным распределением. Представим начальное распределение $\chi(x)$ в виде ряда Фурье по собственным функциям рассматриваемой краевой задачи $f_n(x)=\cos(\pi nx/L)$, т.е.

$$\chi(x)=\frac{1}{L}\int_0^L \chi(x)dx+\frac{2}{L}\sum_{n=1}^{\infty}\cos\left(\frac{\pi n x}{L}\right)\int_0^L \chi(x)\cos\left(\frac{\pi n x}{L}\right)dx. \tag{22}$$

Далее в соотношении (21) выберем нулевое значение переменной $t$ и приравняем полученный ряд ряду (22)

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_{n6}\cos\left(\frac{\pi n x}{L}\right)=\frac{1}{L}\int_0^L \chi(x)dx+\frac{2}{L}\sum_{n=1}^{\infty}\cos\left(\frac{\pi n x}{L}\right)\int_0^L \chi(x)\cos\left(\frac{\pi n x}{L}\right)dx.$$

Путём сравнения членов ряда при одинаковых значениях $n$ получаем

$$C_{06}=\frac{1}{L}\int_0^L \chi(x)dx;\ C_{n6}=\frac{2}{L}\int_0^L \chi(x)\cos\left(\frac{\pi n x}{L}\right)dx,\ n\geq 1.$$

В окончательной форме решение уравнения (18*а*) имеет следующий вид

$$u(x,t)=\frac{1}{L}\int_0^L \chi(x)dx+\frac{2}{L}\sum_{n=0}^{\infty}\cos\left(\frac{\pi n x}{L}\right)e^{-\frac{\pi^2 n^2}{L^2}Dt}\int_0^L \chi(x)\cos\left(\frac{\pi n x}{L}\right)dx.$$

Описанный метод называется метод разделения переменных Фурье.

### 3.1.2. Линейное неоднородное параболическое уравнение

Рассмотрим линейное неоднородное параболическое уравнение

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}=D\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}+g(x,t). \tag{18б}$$

Функция $g(x,t)$ в данном уравнении описывает источник поступающих в область $G$ вещества или теплоты. Дополним уравнение (18*б*) следующими граничными и начальным условиями

$$\left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right|_{x=0}=\left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right|_{x=L}=0,\ u(x,0)=\chi(x).$$

Будем искать решение уравнения (18*б*) в виде ряда, по собственным функциям однородной краевой задачи $f_n(x)=\cos(\pi nx/L)$ [18], т.е.

$$u(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty} h_n(t)\cos\left(\frac{\pi n x}{L}\right), \tag{23}$$

где $h_n(t)$ – неизвестная пока функция переменной $t$. Представим функцию $g(x,t)$, а также начальное распределение $\chi(x)$ в виде рядов Фурье по собственным функциям однородной краевой задачи

$$g(x,t)=\frac{1}{L}\int_0^L g(x,t)dx+\frac{2}{L}\sum_{n=1}^{\infty}\cos\left(\frac{\pi n x}{L}\right)\int_0^L g(x,t)\cos\left(\frac{\pi n x}{L}\right)dx, \tag{24}$$

$$\chi(x)=\frac{1}{L}\int_0^L \chi(x)dx+\frac{2}{L}\sum_{n=1}^{\infty}\cos\left(\frac{\pi n x}{L}\right)\int_0^L \chi(x)\cos\left(\frac{\pi n x}{L}\right)dx. \tag{25}$$

Подстановка ряда (24) в уравнение (18*б*) позволяет получить уравнение для неизвестной функции $h_n(t)$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\partial h_n(t)}{\partial t}\cos\left(\frac{\pi n x}{L}\right)=-D\frac{\pi^2}{L^2}\sum_{n=0}^{\infty}n^2 h_n(t)\cos\left(\frac{\pi n x}{L}\right)+$$

$$+\frac{1}{L}\int_0^L g(x,t)\,dx+\frac{2}{L}\sum_{n=1}^{\infty}\cos\left(\frac{\pi n x}{L}\right)\int_0^L g(x,t)\cos\left(\frac{\pi n x}{L}\right)dx.$$

Далее в полученном уравнении группируем слагаемые при одинаковых значениях $n$ и приравниваем их. Тогда

$$\frac{\partial h_0(t)}{\partial t}=\frac{1}{L}\int_0^L g(x,t)\,dx,\ \frac{\partial h_n(t)}{\partial t}=-D\frac{\pi^2 n^2}{L^2}h_n(t)+\frac{2}{L}\int_0^L g(x,t)\cos\left(\frac{\pi n x}{L}\right)dx.$$

Решениями данных уравнений являются следующие функции

$$h_0(t)=\frac{1}{L}\int_0^t\int_0^L g(x,\tau)\,d\tau+C_{06},\ h_n(t)=\frac{2}{L}\int_0^t e^{\frac{\pi^2 n^2}{L^2}D\tau}\int_0^L g(x,\tau)\cos\left(\frac{\pi n x}{L}\right)dx\,d\tau+C_{n6},$$

где $C_{06}$ и $C_{n6}$ – постоянные интегрирования. Подстановка полученных соотношений в предлагаемую форму решения (23) уравнения (18*б*) приводит к следующему результату

$$u(x,t)=C_{06}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{2}{L}\int_0^t e^{\frac{\pi^2 n^2}{L^2}D\tau}\int_0^L g(x,\tau)\cos\left(\frac{\pi n x}{L}\right)dx\,d\tau+C_{n6}\right]\cos\left(\frac{\pi n x}{L}\right)+$$

$$+\frac{1}{L}\int_0^t\int_0^L g(x,\tau)\,d\tau. \tag{26}$$

Постоянные интегрирования $C_{06}$ и $C_{n6}$ определим с помощью начального условия. Для этого в соотношение (26) подставим нулевое значение переменной $t$ и приравняем полученный результат разложению начального условия $\chi(x)$ (25), т.е.

$$\frac{1}{L}\int_0^0\int_0^L g(x,\tau)\,d\tau+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{2}{L}\int_0^0 e^{\frac{\pi^2 n^2}{L^2}D\tau}\int_0^L g(x,\tau)\cos\left(\frac{\pi n x}{L}\right)dx\,d\tau+C_{n6}\right]\cos\left(\frac{\pi n x}{L}\right)+$$

$$+C_{06}=\frac{1}{L}\int_0^L \chi(x)dx+\frac{2}{L}\sum_{n=1}^{\infty}\cos\left(\frac{\pi n x}{L}\right)\int_0^L \chi(x)\cos\left(\frac{\pi n x}{L}\right)dx.$$

Тогда

$$C_{0б}=\frac{1}{L}\int_0^L \chi(x)dx,\ C_{nб}=\int_0^L \chi(x)\cos\left(\frac{\pi n x}{L}\right)dx.$$

В окончательной форме решение уравнения (18*б*) имеет следующий вид

$$u(x,t)=\frac{1}{L}\int_0^t\int_0^L g(x,\tau)\,d\tau+\frac{1}{L}\int_0^L \chi(x)dx+$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{2}{L}\int_0^t e^{\frac{\pi^2 n^2}{L^2}D\tau}\int_0^L g(x,\tau)\cos\left(\frac{\pi n x}{L}\right)dx\,d\tau+\int_0^L \chi(x)\cos\left(\frac{\pi n x}{L}\right)dx\right]\cos\left(\frac{\pi n x}{L}\right).$$

### 3.1.3. Линейное однородное гиперболическое уравнение

Найдём решение линейного однородного гиперболического уравнения с постоянным коэффициентом

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}=E\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \tag{27}$$

в области $G$: $0\le x\le L$, $0\le t<\infty$ с условиями

$$u(0,t)=0,\ u(L,t)=0,\ u(x,0)=\chi_1(x),\ \left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right|_{t=0}=\chi_2(t).$$

С физической точки зрения уравнение (27), имеющее название классического волнового уравнения, можно проинтерпретировать следующим образом. Пусть имеется струна, совершающая малые колебания. В данном случае функция $u(x,t)$ является компонентой вектора смещения, перпендикулярной к оси абсцисс. Коэффициент $E$ является отношением величин натяжения струны к её плотности и имеет смысл квадрата скорости распространения колебания. Будем искать решение уравнения (27) в виде произведения двух множителей, один из которых зависит только от переменной $x$, другой – только от переменной $t$, т.е. $u(x,t)=A(x)\cdot B(t)$ [4]. Подставим предлагаемую форму решения в уравнение (27)

$$A(x)\frac{\partial^2 B(t)}{\partial t^2}=E\,B(t)\frac{\partial^2 A(x)}{\partial x^2}.$$

Далее функции, зависящие только от переменной $x$, перенесём в одну часть данного уравнения, а функции, зависящие только от переменной $t$, перенесём в одну часть уравнения, т.е.

$$\frac{1}{B(t)}\frac{\partial^2 B(t)}{\partial t^2}=\frac{E}{A(x)}\frac{\partial^2 A(x)}{\partial x^2}.$$

Такое равенство может быть выполнено только в том случае, когда и правая, и левая часть данного уравнения равны некоторой неопределённой пока постоянной величине $\gamma$.

$$\frac{1}{B(t)}\frac{\partial^2 B(t)}{\partial t^2}=\frac{E}{A(x)}\frac{\partial^2 A(x)}{\partial x^2}=\gamma.$$

Для определения функций $A(x)$ и $B(t)$ необходимо решить уравнения

$$\frac{1}{B(t)}\frac{\partial^2 B(t)}{\partial t^2}=\gamma\,,\ \frac{E}{A(x)}\frac{\partial^2 A(x)}{\partial x^2}=\gamma\,.$$

Общими решениями данных уравнений являются следующие функции

$$A(x)=C_1\cos\left(x\sqrt{\frac{\gamma}{E}}\right)+C_2\sin\left(x\sqrt{\frac{\gamma}{E}}\right),\ B(t)=C_3\cos\left(\sqrt{\gamma}\,t\right)+C_4\sin\left(\sqrt{\gamma}\,t\right),$$

где $C_1$, $C_2$, $C_3$, $C_4$ – постоянные интегрирования. Общим решением уравнения (27) является произведение данных функций $A(x)$ и $B(t)$

$$u(x,t)=\left[C_1\cos\left(x\sqrt{\frac{\gamma}{E}}\right)+C_2\sin\left(x\sqrt{\frac{\gamma}{E}}\right)\right]\left[C_3\cos\left(\sqrt{\gamma}\,t\right)+C_4\sin\left(\sqrt{\gamma}\,t\right)\right]. \qquad (28)$$

Далее определим постоянные интегрирования. Для этого на первом этапе приравняем нулю переменную $x$. Тогда

$$u(0,t)=C_1\left[C_3\cos\left(\sqrt{\gamma}\,t\right)+C_4\sin\left(\sqrt{\gamma}\,t\right)\right].$$

На границе $x=0$ искомая функция равна нулю. Это условие выполняется в тех случаях, когда $C_1$=0 или $C_3\cos\left(\sqrt{\gamma}\,t\right)+C_4\sin\left(\sqrt{\gamma}\,t\right)=0$. Однако второе равенство интереса не представляет, т.к. оно соответствует равенству нулю искомой функции $u(x,t)$.

Воспользуемся вторым граничным условием. Для этого подставим в соотношение (28) значение переменной $x=L$, т.е.

$$u(L,t)=C_2\sin\left(L\sqrt{\frac{\gamma}{E}}\right)\left[C_3\cos\left(\sqrt{\gamma}\,t\right)+C_4\sin\left(\sqrt{\gamma}\,t\right)\right]=0\,.$$

Это условие выполняется в тех случаях, когда или $C_2$=0, или $C_3\cos\left(\sqrt{\gamma}t\right)+$ $+C_4\sin\left(\sqrt{\gamma}\,t\right)=0$, или $\sin\left(L\sqrt{\gamma/E}\right)=0$. Однако, первые два равенства интереса не представляют, т.к. они соответствуют равенству нулю искомой функции $u$ $(x,t)$. Из последнего равенства следует, что $\gamma=\pi^2 n^2 E/L^2$, $n=0$, 1, 2, … Таким образом, рассмотренным граничным условиям удовлетворяет бесконечное число решений. Составим формально ряд из таких решений

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}C_{n2}\sin\left(\frac{\pi\,n\,x}{L}\right)\left[C_{n3}\cos\left(\frac{\pi\,n}{L}\sqrt{E}\,t\right)+C_{n4}\sin\left(\frac{\pi\,n}{L}\sqrt{E}\,t\right)\right]. \qquad (29)$$

В данном ряде достаточно найти не три семейства постоянных интегрирования $C_{n2}$, $C_{n3}$ и $C_{n4}$, а произведения постоянных интегрирования $C_{n5}= C_{n2}C_{n3}$ и $C_{n6} = C_{n2}C_{n4}$. Для их определения воспользуемся начальными условиями. На первом этапе подставим в соотношение (29) нулевое значение переменной $t$ и представим функцию $\chi_1(t)$ в виде ряда Фурье, т.е.

$$u(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}C_{n5}\sin\left(\frac{\pi\,n\,x}{L}\right),\ \chi_1(x)=\frac{2}{L}\sum_{n=1}^{\infty}\sin\left(\frac{\pi\,n\,x}{L}\right)\int_0^L\chi_1(x)\sin\left(\frac{\pi\,n\,x}{L}\right)d\,x\,. \qquad (30)$$

Левые части последних соотношений равны друг другу. Значит, равны и правые. Тогда из этого условия получаем

$$C_{n5} = \frac{2}{L}\int_0^L \chi_1(x)\sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right)dx\,.$$

Подставляя полученные значения постоянных интегрирования в соотношение (29), получаем

$$u(x,t) = \frac{2}{L}\sum_{n=1}^{\infty}\sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right)\cos\left(\frac{\pi n}{L}\sqrt{E}\,t\right)\int_0^L \chi_1(x)\sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right)dx +$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty} C_{n6}\sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right)\sin\left(\frac{\pi n}{L}\sqrt{E}\,t\right). \qquad (29a)$$

Далее воспользуемся вторым начальным условием. Для этого вычислим производную от искомой функции, определяемой соотношением (29*a*), по переменной $t$. Искомая производная имеет вид

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = -2\sqrt{E}\,\frac{\pi}{L^2}\sum_{n=1}^{\infty} n\sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right)\sin\left(\frac{\pi n}{L}\sqrt{E}\,t\right)\int_0^L \chi_1(x)\sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right)dx +$$

$$+\sqrt{E}\,\frac{\pi}{L}\sum_{n=1}^{\infty} n\,C_{n6}\sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right)\cos\left(\frac{\pi n}{L}\sqrt{E}\,t\right). \qquad (29б)$$

Для определения постоянных интегрирования $C_{n6}$ подставим в соотношение (29*б*) нулевое значение переменной $t$ и представим функцию $\chi_2(t)$ в виде ряда Фурье, т.е.

$$\left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right|_{t=0} = \sqrt{E}\,\frac{\pi}{L}\sum_{n=1}^{\infty} n\,C_{n6}\sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right),$$

$$\chi_2(x) = \frac{2}{L}\sum_{n=1}^{\infty}\sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right)\int_0^L \chi_2(x)\sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right)dx\,. \qquad (31)$$

Левые части последних соотношений равны друг другу. Следовательно, равны и правые. Из этого условия определяем оставшиеся постоянные интегрирования. В окончательной форме решение уравнения (27) имеет вид

$$u(x,t) = \frac{1}{L}\int_0^L \chi_1(x)dx + \frac{2}{L}\sum_{n=1}^{\infty}\sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right)\cos\left(\frac{\pi n}{L}\sqrt{E}\,t\right)\int_0^L \chi_1(x)\sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right)dx +$$

$$+\frac{1}{\pi\sqrt{E}}\int_0^L \chi_2(x)dx + \frac{1}{\pi\sqrt{E}}\sum_{n=1}^{\infty}\sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right)\sin\left(\frac{\pi n}{L}\sqrt{E}\,t\right)\int_0^L \chi_2(x)\sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right)dx\,.$$

Движения струны такого типа называется стоячей волной. Точки $x = mL/n$ ($m = 1, 2, \ldots, n$-1), в которых $sin(\pi n\,x/L) = 0$, в течении всего процесса остаются неподвижными и называются узлами стоячей волны $u_n(x,t)$. Точки $x = (2\,m+1)/2n$ ($m = 0, 1, \ldots, n$-1), в которых $sin(\pi n\,x/L) = \pm 1$, совершают с максимальной амплитудой, называются пучностями стоячей волны.

### 3.1.4. Линейное неоднородное гиперболическое уравнение

Рассмотрим линейное неоднородное гиперболическое уравнение

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = E\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + g(x,t) \qquad (27a)$$

в области $G$: $0 \le x \le L$, $0 \le t \le \Theta$ с условиями

$$u(0,t)=0,\ u(L,t)=0,\ u(x,0)=\chi_1(x),\ \left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right|_{t=0} = \chi_2(t).$$

Будем искать решение уравнения (27$a$) в виде ряда, по собственным функциям краевой задачи с однородным волновым уравнением $f_n(x)=sin(\pi n x/L)$, т.е.

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} h_n(t)\sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right), \qquad (32)$$

где $h_n(x)$ – неизвестная пока функция. Представим функцию $g(x,t)$, а также начальные условия в виде рядов Фурье по собственным функциям краевой задачи с однородным волновым уравнением

$$g(x,t) = \frac{1}{L}\int_0^L g(x,t)\,dx + \frac{2}{L}\sum_{n=1}^{\infty}\sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right)\int_0^L g(x,t)\sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right)dx, \qquad (33)$$

Подстановка рядов (32) и (33) в уравнение (27$a$) позволяет получить уравнение для неизвестной функции $h_n(x)$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\partial^2 h_n(t)}{\partial t^2}\sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right) = -E\frac{\pi^2}{L^2}\sum_{n=0}^{\infty} n^2 h_n(t)\sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right) +$$

$$+\frac{2}{L}\sum_{n=1}^{\infty}\sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right)\int_0^L g(x,t)\sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right)dx.$$

Далее в полученном уравнении группируем слагаемые при одинаковых значениях $n$ и приравниваем их. Тогда

$$\frac{\partial^2 h_n(t)}{\partial t^2} = -n^2 E\frac{\pi^2}{L^2}h_n(t) + \frac{2}{L}\int_0^L g(x,t)\sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right)dx.$$

Решениями данных уравнений являются следующие функции

$$h_n(t) = \left[C_{n1} - \frac{2}{\pi n L}\int_0^t \cos\left(\frac{\pi n}{L}\sqrt{E}\,\tau\right)\int_0^L g(x,\tau)\sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right)dx\,d\tau\right]\cos\left(\frac{\pi n}{L}\sqrt{E}\,t\right) +$$

$$+\left[C_{n2} + \frac{2}{\pi n L}\int_0^t \sin\left(\frac{\pi n}{L}\sqrt{E}\,\tau\right)\int_0^L g(x,\tau)\sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right)dx\,d\tau\right]\sin\left(\frac{\pi n}{L}\sqrt{E}\,t\right).$$

Подстановка последних соотношений в ряд (32) позволяет получить

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right)\left[C_{n1} - \frac{2}{\pi n L}\int_0^t \cos\left(\frac{\pi n}{L}\sqrt{E}\,\tau\right)\int_0^L g(x,\tau)\sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right)dx\,d\tau\right]\times$$

$$\times\cos\left(\frac{\pi n}{L}\sqrt{E}\,t\right)+\sum_{n=1}^{\infty}\left[C_{n2}+\frac{2}{\pi n L}\int_0^t \sin\left(\frac{\pi n}{L}\sqrt{E}\,\tau\right)\int_0^L g(x,\tau)\sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right)dx\,d\tau\right]\times$$

$$\times\sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right)\sin\left(\frac{\pi n}{L}\sqrt{E}\,t\right). \qquad (34)$$

Для определения постоянных интегрирования воспользуемся начальными условиями. На первом этапе выберем в соотношении (34) нулевое значение переменной $t$. После такой подстановки получаем

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right)\left[C_{n1}-\frac{2}{\pi n L}\int_0^0 \cos\left(\frac{\pi n}{L}\sqrt{E}\,\tau\right)\int_0^L g(x,\tau)\sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right)dx\,d\tau\right]\times$$

$$\times\cos\left(\frac{\pi n}{L}\sqrt{E}\,0\right)+\sum_{n=1}^{\infty}\left[C_{n2}+\frac{2}{\pi n L}\int_0^0 \sin\left(\frac{\pi n}{L}\sqrt{E}\,\tau\right)\int_0^L g(x,\tau)\sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right)dx\,d\tau\right]\times$$

$$\times\sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right)\sin\left(\frac{\pi n}{L}\sqrt{E}\,0\right).$$

Учитывая нулевое значение ряда слагаемых в данном соотношении, запишем его в более простом виде

$$u(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}C_{n1}\sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right).$$

С другой стороны полученный ряд совпадает с рядом (30), являющимся разложением в ряд Фурье первого начального условия, т.е. функции $\chi_1(x)$. После приравнивания коэффициентов при одинаковых значениях номера $n$ получаем

$$u(x,t)=2\sum_{n=1}^{\infty}\cos\left(\frac{\pi n}{L}\sqrt{E}\,t\right)\sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right)\left[\frac{1}{L}\int_0^L \chi_1(x)\sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right)dx-\int_0^t \cos\left(\frac{\pi n}{L}\sqrt{E}\,\tau\right)\times\right.$$

$$\left.\times\frac{1}{\pi n L}\int_0^L g(x,\tau)\sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right)dx\,d\tau\right]+\sum_{n=1}^{\infty}\left[C_{n2}+\frac{2}{\pi n\sqrt{E}}\int_0^t\int_0^L g(x,\tau)\sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right)dx\times\right.$$

$$\left.\times\sin\left(\frac{\pi n}{L}\sqrt{E}\,\tau\right)d\tau\right]\sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right)\sin\left(\frac{\pi n}{L}\sqrt{E}\,t\right). \qquad (34a)$$

Для использования второго начального условия необходимо определить производную по переменной $t$ от функции (34). Данная производная имеет следующий вид

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}=-\frac{2}{\pi L}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\int_0^t \cos\left(\frac{\pi n}{L}\sqrt{E}\,\tau\right)\int_0^L g(x,\tau)\sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right)dx\,d\tau\cos\left(\frac{\pi n}{L}\sqrt{E}\,t\right)\times$$

$$\times\sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right)-2\sqrt{E}\,\frac{\pi}{L}\sum_{n=1}^{\infty}n\sin\left(\frac{\pi n}{L}\sqrt{E}\,t\right)\sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right)\left[\frac{1}{L}\int_0^L \chi_1(x)\sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right)dx-\right.$$

$$-\frac{1}{\pi n L}\int_0^t \cos\left(\frac{\pi n}{L}\sqrt{E}\,\tau\right)\int_0^L g(x,\tau)\sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right)dx\,d\tau\Bigg]+\frac{2}{\pi\sqrt{E}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\left(\frac{\pi n}{L}\sqrt{E}\,t\right)\times$$

$$\times\sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right)\int_0^t \sin\left(\frac{\pi n}{L}\sqrt{E}\,\tau\right)\int_0^L g(x,\tau)\sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right)dx\,d\tau+\sum_{n=1}^{\infty}n\frac{\pi}{L}\cos\left(\frac{\pi n}{L}\sqrt{E}\,t\right)\times$$

$$\times\sqrt{E}\sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right)\left[C_{n2}+\frac{2}{\pi n\sqrt{E}}\int_0^t \sin\left(\frac{\pi n}{L}\sqrt{E}\,\tau\right)\int_0^L g(x,\tau)\sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right)dx\,d\tau\right]. \quad (35)$$

Приравнивая переменную $t$ к нулю, получаем

$$\left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right|_0=\sqrt{E}\frac{\pi}{L}\sum_{n=1}^{\infty}n\,C_{n2}\sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right).$$

Для определения последних постоянных интегрирования воспользуемся рядом (31). После приравнивания коэффициентов при одинаковых значениях номера $n$ получаем

$$C_{n2}=\frac{2}{\pi n\sqrt{E}}\int_0^L \chi_2(x)\sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right)dx\,.$$

Тогда

$$u(x,t)=\frac{2}{L}\sum_{n=1}^{\infty}\cos\left(\frac{\pi n}{L}\sqrt{E}\,t\right)\sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right)\int_0^L \chi_1(x)\sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right)dx-\sum_{n=1}^{\infty}\sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right)\times$$

$$\times\frac{2}{\pi L n}\cos\left(\frac{\pi n}{L}\sqrt{E}\,t\right)\int_0^t \cos\left(\frac{\pi n}{L}\sqrt{E}\,\tau\right)\int_0^L g(x,\tau)\sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right)dx\,d\tau+\frac{2}{\pi\sqrt{E}}\times$$

$$\times\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right)\sin\left(\frac{\pi n}{L}\sqrt{E}\,t\right)\int_0^L \chi_2(x)\sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right)dx+\frac{2}{L}\sum_{n=1}^{\infty}\sin\left(\frac{\pi n}{L}\sqrt{E}\,t\right)\times$$

$$\times\sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right)\frac{1}{n}\int_0^t\int_0^L g(x,\tau)\sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right)dx\sin\left(\frac{\pi n}{L}\sqrt{E}\,\tau\right)d\tau\,.$$

### 3.1.5. Линейное однородное эллиптическое уравнение

Рассмотрим линейное однородное эллиптическое уравнение внутри круга радиуса $R$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left[r\frac{\partial u(r,\varphi)}{\partial r}\right]+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u(r,\varphi)}{\partial\varphi^2}=0 \quad (36)$$

с граничным условием

$$u(r{=}R,\varphi)=U(\varphi),$$

где $(r,\varphi)$ – полярные координаты с началом в центре круга. Полярные координаты связаны с декартовыми следующими соотношениями

$$\begin{cases} x = r \cdot \cos(\varphi) \\ y = r \cdot \sin(\varphi) \end{cases}; \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ tg(\varphi) = y/x \end{cases}.$$

Будем искать решение уравнения (36) в виде произведения двух функций

$$u(r\,\varphi) = A(r)\,B(\varphi).$$

Подстановка предлагаемой формы решения в уравнение (36) позволяет получить

$$\frac{B(\varphi)}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left[r\frac{\partial A(r)}{\partial r}\right] + \frac{A(r)}{r^2}\frac{\partial^2 B(\varphi)}{\partial \varphi^2} = 0.$$

Далее разделяем переменные

$$\frac{r}{A(r)}\frac{\partial}{\partial r}\left[r\frac{\partial A(r)}{\partial r}\right] = -\frac{1}{B(\varphi)}\frac{\partial^2 B(\varphi)}{\partial \varphi^2}$$

и приравниваем правую и левую часть уравнения неопределённому пока параметру $\gamma$. Решением полученных уравнений

$$r\frac{\partial}{\partial r}\left[r\frac{\partial A(r)}{\partial r}\right] - \gamma A(r) = 0, \quad \frac{\partial^2 B(\varphi)}{\partial \varphi^2} + \gamma B(\varphi) = 0. \qquad (37)$$

являются следующие функции

$$A(r) = C_1 J_0\left(\sqrt{\gamma}\frac{r}{R}\right) + C_2 N_0\left(\sqrt{\gamma}\frac{r}{R}\right), \; B(\varphi) = C_3 \cos\left(\sqrt{\gamma}\,\varphi\right) + C_4 \sin\left(\sqrt{\gamma}\,\varphi\right).$$

Таким образом, общее решение уравнения (37) имеет вид

$$u(r,\varphi) = \left[C_1 J_0\left(\sqrt{\gamma}\frac{r}{R}\right) + C_2 N_0\left(\sqrt{\gamma}\frac{r}{R}\right)\right]\left[C_3 \cos\left(\sqrt{\gamma}\,\varphi\right) + C_4 \sin\left(\sqrt{\gamma}\,\varphi\right)\right], \qquad (38)$$

где $J_0(\gamma r)$ – функция Бесселя первого рода нулевого порядка, $N_0(\gamma r)$ – функция Бесселя второго рода нулевого порядка. Обе функции являются решением первого из пары уравнений (37), называющегося уравнением Бесселя. Рассмотрим функции Бесселя более подробно. В общем виде уравнение Бесселя имеет вид

$$r\frac{\partial}{\partial r}\left[r\frac{\partial A(r)}{\partial r}\right] + \left(r^2 - s^2\right)A(r) = 0. \qquad (39)$$

В данном уравнении (частном случае уравнения Бесселя) $s$ – действительное число. Решениями уравнения (39) являются следующие функции [4]

1) функции Бесселя первого рода (функции Бесселя) $m$-го порядка

$$J_m(r) = \left(\frac{r}{2}\right)^m \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\,\Gamma(m+k+1)}\left(\frac{r}{2}\right)^{2k}.$$

$k!=1\cdot2\cdot\ldots\cdot k$. Соотношение для гамма-функции представимо с помощью интеграла или предела

$$\Gamma(r)=\int_0^\infty e^{-\tau}\tau^{r-1}d\tau=\lim_{n\to\infty}\frac{n!n^{r-1}}{r(r+1)(r+2)\ldots(r+n-1)}.$$

При целых положительных значениях $r$ выполняется свойство: $\Gamma(r)=(r-1)!$ Графики функций Бесселя первого рода первых трех порядков приведены на рис. 1.

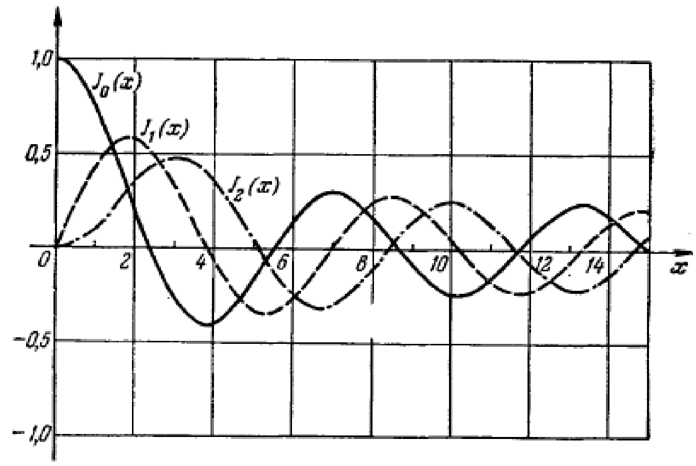


Рис. 1.

2) функции Бесселя второго рода (функции Неймана, функции Вебера) $m$-го порядка

$$N_m(r)=\lim_{m\to n}\frac{J_m(r)\cos(m\pi)-J_{-m}(r)}{\sin(m\pi)}.$$

Графики функций Бесселя второго рода первых двух порядков приведены на рис. 2.

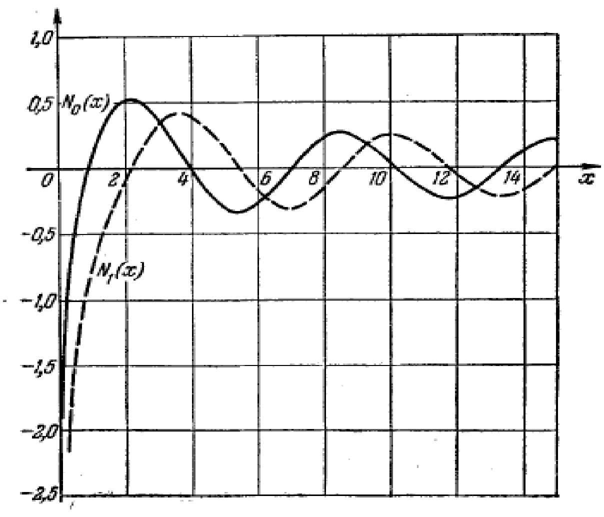


Рис. 2.

3) функции Ханкеля (Ганкеля) первого и второго рода $m$-го порядка

$$H_m^{(1)}(r)=J_m(r)+i\,N_m(r),\ H_m^{(2)}(r)=J_m(r)-i\,N_m(r),\ i=\sqrt{-1}.$$

Из рис.2 следует, что при малых значениях переменной $r$ решение (38) является физически нереализуемым. По этой причине выберем нулевое значение постоянной интегрирования $C_2$. Поскольку искомая функция $u(r,\varphi)$ определяется в круге, выполняется условие периодичности $u(r,\varphi)=u(r,\varphi+2\pi)$. Данное условие позволяет получить: $\gamma=n^2$. Тогда можно записать

$$u(r,\varphi)=\sum_{n=0}^{\infty}J_0\left(n\frac{r}{R}\right)\left[C_{3n}\cos(n\varphi)+C_{4n}\sin(n\varphi)\right]. \tag{40}$$

Далее представим функцию $U(\varphi)$ в виде ряда Фурье

$$U(\varphi)=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}U(\varphi)\cos(n\varphi)d\varphi+\frac{1}{2\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\cos(n\varphi)\int_0^{2\pi}U(\varphi)\cos(n\varphi)d\varphi+$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}U(\varphi)\sin(n\varphi)d\varphi+\frac{1}{2\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\sin(n\varphi)\int_0^{2\pi}U(\varphi)\sin(n\varphi)d\varphi. \tag{41}$$

При условии $r=R$ ряды (40) и (41) должны совпасть, что приводит к равенству соответствующих членов ряда. В окончательной форме решение уравнения (36) имеет вид

$$u(r,\varphi)=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}U(\varphi)\cos(n\varphi)d\varphi+\frac{1}{2\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{J_0(nr/R)}{J_0(n)}\cos(n\varphi)\int_0^{2\pi}U(\varphi)\cos(n\varphi)d\varphi+$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}U(\varphi)\sin(n\varphi)d\varphi+\frac{1}{2\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{J_0(nr/R)}{J_0(n)}\sin(n\varphi)\int_0^{2\pi}U(\varphi)\sin(n\varphi)d\varphi.$$

### 3.1.6. Линейное неоднородное эллиптическое уравнение

Рассмотрим линейное неоднородное эллиптическое уравнение внутри круга радиуса $R$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left[r\frac{\partial u(r,\varphi)}{\partial r}\right]+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u(r,\varphi)}{\partial\varphi^2}=g(r,\varphi) \tag{42}$$

с граничным условием

$$u(r=R,\varphi)=U(\varphi),$$

где $g(r,\varphi)$ – известная функция. Будем искать решение уравнения (42) в виде ряда по собственным функциям однородной задачи, т.е.

$$u(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}h_n(\varphi)\,J_0\left(\frac{nr}{K}\right), \tag{43}$$

где $h_n(\varphi)$ – неизвестная пока функция. Представим функцию $g(r,\varphi)$, а также граничное условие в виде рядов Фурье по собственным функциям краевой задачи с однородным эллиптическим уравнением

$$g(r,\varphi)=\frac{1}{R}\int_0^R r\,g(r,\varphi)dr+\frac{2}{R}\sum_{n=1}^{\infty}J_0\left(n\frac{r}{R}\right)\int_0^R r\,g(r,\varphi)J_0\left(n\frac{r}{R}\right)dr. \tag{44}$$

Для того, что бы определить функции $h_n(\varphi)$, подставим ряды (43) и (44) в уравнение (42). Тогда после решения соответствующих уравнений получаем искомые функции

$$h_0(\varphi)=\int_0^{\varphi}(\varphi-v)\int_0^{R} r\,g(r,v)\,d\,r\,d\,v+C_1\varphi+C_2,$$

$$h_n(\varphi)=\left[C_1-\frac{1}{\pi n}\int_0^{\varphi}\sin(n v)\int_0^{R} r\,g(r,v)J_0\left(n\frac{r}{R}\right)d\,r\,d\,v\right]\cos(n\varphi)+$$

$$+\left[C_2+\frac{1}{\pi n}\int_0^{\varphi}\cos(n v)\int_0^{R} r\,g(r,v)J_0\left(n\frac{r}{R}\right)d\,r\,d\,v\right]\sin(n\varphi),\ n\geq 1.$$

При нахождении данных функций использованы следующие свойства функции Бесселя первого рода

$$J_{m+1}(x)=\frac{m}{x}J_m(x)-\frac{d}{d\,x}J_m(x),\ J_{m+1}(x)=\frac{2\,m}{x}J_m(x)-J_{m-1}(x).$$

Далее для определения постоянных интегрирования воспользуемся разложением граничного условия в ряд Фурье (41). После приравнивания коэффициентов при одинаковых значениях *n* получаем

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}U(\varphi)\cos(n\varphi)\,d\,\varphi-\frac{1}{\pi n}\int_0^{\varphi}\sin(n v)\int_0^{R} r\,g(r,v)J_0\left(n\frac{r}{R}\right)d\,r\,d\,v\right]\times$$

$$\times\cos(n\varphi)\frac{J_0(n r/R)}{J_0(n)}+\sum_{n=1}^{\infty}\sin(n\varphi)\frac{J_0(n r/R)}{J_0(n)}\left[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}U(\varphi)\sin(n\varphi)d\,\varphi+\frac{1}{\pi n}\times\right.$$

$$\left.\times\int_0^{\varphi}\cos(n v)\int_0^{R} r\,g(r,v)J_0\left(n\frac{r}{R}\right)d\,r\,d\,v\right]+\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}U(\varphi)\cos(n\varphi)d\,\varphi+\int_0^{\varphi}(\varphi-v)\int_0^{R} g(r,v)\times$$

$$\times r\,d\,r\,d\,v+\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}U(\varphi)\sin(n\varphi)d\,\varphi.$$

### 3.2. Метод распространяющихся волн

Рассмотрим однородное гиперболическое уравнение с постоянным коэффициентом (27) в неограниченной области $-\infty\leq x\leq\infty$ с начальными условиями

$$u(x,0)=\chi_1(x),\ \left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right|_{t=0}=\chi_2(t).$$

Введём новые переменные $\xi=x+\sqrt{E}\,t$ и $\eta=x-\sqrt{E}\,t$. Подставим данные переменные в (27). Тогда после однократного дифференцирования по исходным переменным *x* и *t* получаем

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\sqrt{E}\frac{\partial u(\xi,\eta)}{\partial\xi}-\sqrt{E}\frac{\partial u(\xi,\eta)}{\partial\eta}\right]=E\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial u(\xi,\eta)}{\partial\xi}+\frac{\partial u(\xi,\eta)}{\partial\eta}\right].$$

Повторное дифференцирование левой и правой частей данного соотношения по переменным *x* и *t* приводит уравнение (27) к следующему виду

$$E\frac{\partial^2 u(\xi,\eta)}{\partial \xi^2}-E\frac{\partial^2 u(\xi,\eta)}{\partial \eta\partial \xi}-E\frac{\partial^2 u(\xi,\eta)}{\partial \xi\partial \eta}+E\frac{\partial^2 u(\xi,\eta)}{\partial \eta^2}=$$

$$=E\left[\frac{\partial^2 u(\xi,\eta)}{\partial \xi^2}+\frac{\partial^2 u(\xi,\eta)}{\partial \xi\partial \eta}+\frac{\partial^2 u(\xi,\eta)}{\partial \eta\partial \xi}+\frac{\partial^2 u(\xi,\eta)}{\partial \eta^2}\right].$$

Приведение подобных в данном уравнении позволяет получить уравнение (27) в новых переменных в следующем виде

$$\frac{\partial^2 u(\xi,\eta)}{\partial \xi\partial \eta}=0. \qquad (27\textit{б})$$

Далее проинтегрируем уравнение (27*б*) по переменной $\xi$, что приводит к следующему результату

$$\frac{\partial u(\xi,\eta)}{\partial \eta}=f(\eta).$$

Интегрируя данное соотношение по переменной $\eta$ при фиксированном значении переменной $\xi$, получаем

$$u(\xi,\eta)=\int_0^\eta f(v)\,dv+f_1(\xi).$$

Введём обозначение $f_2(\eta)=\int_0^\eta f(v)dv$. Тогда

$$u(\xi,\eta)=f_1(\xi)+f_2(\eta).$$

Данная функция является общим интегралом уравнения (27*б*). Тогда и функция

$$u(x,t)=f_1\left(x+\sqrt{E}\,t\right)+f_2\left(x-\sqrt{E}\,t\right) \qquad (45)$$

также является интегралом соответствующего гиперболического уравнения в исходных переменных. Для определения функций $f_1\left(x+\sqrt{E}\,t\right)$ и $f_2\left(x-\sqrt{E}\,t\right)$ воспользуемся начальными условиями. Найдём производную по переменной $t$ от решения (45)

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}=\sqrt{E}\frac{d f_1\left(x+\sqrt{E}\,t\right)}{d\left(x+\sqrt{E}\,t\right)}-\sqrt{E}\frac{d f_2\left(x-\sqrt{E}\,t\right)}{d\left(x-\sqrt{E}\,t\right)}.$$

Далее и в решении (39), и в его производной выберем нулевое значение переменной $t$, т.е.

$$\begin{cases} f_2(x)+f_2(x)=\chi_1(x) \\ \sqrt{E}\left.\frac{d f_1\left(x+\sqrt{E}\,t\right)}{d\left(x+\sqrt{E}\,t\right)}\right|_{t=0}-\sqrt{E}\left.\frac{d f_2\left(x-\sqrt{E}\,t\right)}{d\left(x-\sqrt{E}\,t\right)}\right|_{t=0}=\chi_2(x). \end{cases} \qquad (46)$$

Интегрирование второго уравнения системы (46) приводит к следующему результату

$$f_1(x)-f_2(x)=\frac{1}{\sqrt{E}}\int\limits_{x_0}^{x}\chi_2(v)d\,v+C,$$

где $x_0$ и $C$ – постоянные величины. Из последнего уравнения, а также первого уравнения системы (46) можно получить

$$f_1(x)=\frac{1}{2}\chi_1(x)+\frac{1}{2\sqrt{E}}\int\limits_{x_0}^{x}\chi_2(v)d\,v+\frac{C}{2},\ f_2(x)=\frac{1}{2}\chi_1(x)-\frac{1}{2\sqrt{E}}\int\limits_{x_0}^{x}\chi_2(v)d\,v-\frac{C}{2}.$$

С учётом полученных соотношений искомая функция $u(x,t)$ принимает вид

$$u(x,t)=\frac{1}{2}\left[\chi_1\left(x+\sqrt{E}\,t\right)+\chi_2\left(x-\sqrt{E}\,t\right)\right]+\frac{1}{2\sqrt{E}}\left[\int\limits_{x_0}^{x+\sqrt{E}\,t}\chi_2(v)d\,v-\int\limits_{x_0}^{x-\sqrt{E}\,t}\chi_2(v)d\,v\right].$$

Пользуясь свойством определённых интегралов, окончательно получаем

$$u(x,t)=\frac{1}{2}\left[\chi_1\left(x+\sqrt{E}\,t\right)+\chi_2\left(x-\sqrt{E}\,t\right)\right]+\frac{1}{2\sqrt{E}}\int\limits_{x-\sqrt{E}\,t}^{x+\sqrt{E}\,t}\chi_2(v)d\,v. \qquad (47)$$

Соотношение (47) называется формулой Даламбера.

### 3.3. Метод интегральных преобразований

Пусть необходимо определить решение некоторого дифференциального уравнения с заданными начальными и граничными условиями. Решение данной краевой задачи может быть существенно упрощено, если вместо непосредственного определения искомой функции искать её интегральное преобразование, определяемое формулой [19]

$$\bar{u}(\xi,y)=\int\limits_{a}^{b}u(x,y)K(x,\xi)d\,x,$$

где $c\le\xi\le d$, $K(x,\xi)$ – зависящая от вида интегрального преобразования функция, определённая в области $a\le\xi\le b$, $c\le\xi\le d$, называемая ядром интегрального преобразования. Функция $u\,(x,y)$ обычно называется оригиналом, функция $\bar{u}(\xi,y)$ - образом или изображением. Следует заметить, что интегральные преобразования представляют наибольший интерес в том случае, когда коэффициенты решаемого уравнения не зависят от той переменной, по которой берётся преобразование. В противном случае применение интегральных преобразований как правило приводит к математическим трудностям.

Пример 7

В качестве первого примера применения интегрального преобразования рассмотрим применение преобразования Лапласа к параболическому уравнению (18*а*) со следующими граничными и начальным условиями

$$u(0,t)=U,\ \left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right|_{x=L}=0,\ u(x=0,0)=U,\ u(x>0,0)=0.$$

Далее применим преобразование Лапласа к правой и левой частям уравнения (18*a*)

$$\int_0^\infty \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} e^{-st} d\,t = D\int_0^\infty \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} e^{-st} d\,t\,.$$

Вычисление по частям интеграла в левой части данного уравнения, а также изменение порядка дифференцирования по переменной $x$ и интегрирования по переменной $t$ в правой части данного уравнения приводит к следующему результату

$$s\,\overline{u}(x,s) - u(x,0) = D\frac{\partial^2 \overline{u}(x,s)}{\partial x^2},$$

где $\overline{u}(x,s) = \int_0^\infty u(x,t) e^{-st} d\,t$. Функция $u(x,0)$ равна нулю во всех точках интервала $0 < x \le L$. Значение функции $u(0,0)$ может быть учтено в граничном условии. Таким образом, уравнение в частных производных (18*a*) преобразуется к следующему обыкновенному дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial^2 \overline{u}(x,s)}{\partial x^2} - \frac{s}{D}\overline{u}(x,s) = 0\,.$$

Лаплас-образ граничных условий для данного уравнения имеет вид

$$\overline{u}(0,s) = \frac{U}{s},\ \left.\frac{\partial \overline{u}(x,s)}{\partial x}\right|_{x=L} = 0\,.$$

Метод Эйлера позволяет получить решение последнего уравнения в виде линейной комбинации экспоненциальных функций с одинаковыми по модулю, но разными по знаку показателями степени:

$$\overline{u}(x,s) = C_1 \exp\left(x\sqrt{\frac{s}{D}}\right) + C_2 \exp\left(-x\sqrt{\frac{s}{D}}\right). \tag{48}$$

Для определения постоянных интегрирования найдём производную от решения (48) переменной $x$. В данном случае имеем

$$\frac{d\,\overline{u}(x,s)}{d\,x} = C_1\sqrt{\frac{s}{D}}\exp\left(x\sqrt{\frac{s}{D}}\right) - C_2\sqrt{\frac{s}{D}}\exp\left(-x\sqrt{\frac{s}{D}}\right). \tag{49}$$

Далее как в решении (48), так и в его производной (49) выберем соответствующие граничные значения переменной $x$, т.е.

$$\overline{u}(0,s) = C_1 + C_2,\ \left.\frac{d\,\overline{u}(x,s)}{d\,x}\right|_{x=L} = C_1\sqrt{\frac{s}{D}}\exp\left(L\sqrt{\frac{s}{D}}\right) - C_2\sqrt{\frac{s}{D}}\exp\left(-L\sqrt{\frac{s}{D}}\right).$$

В результате получим следующую систему уравнений для определения искомых постоянных интегрирования

$$C_1 + C_2 = \frac{U}{s}, \; C_1\sqrt{\frac{s}{D}}\exp\left(L\sqrt{\frac{s}{D}}\right) - C_2\sqrt{\frac{s}{D}}\exp\left(-L\sqrt{\frac{s}{D}}\right) = 0.$$

В результате решения данной системы получаем

$$C_1 = 2\frac{U}{s}\exp\left(-L\sqrt{\frac{s}{D}}\right)\Big/ ch\left(L\sqrt{\frac{s}{D}}\right), \; C_2 = 2\frac{U}{s}\exp\left(L\sqrt{\frac{s}{D}}\right)\Big/ ch\left(L\sqrt{\frac{s}{D}}\right).$$

В данном соотношении функция $y(x)$=$ch(x)$ называется гиперболическим косинусом [4]. Эту функцию можно выразить через экспоненциальную $y_1(x) =$ $exp(x)$ следующим образом

$$ch(x)=[exp(x)\text{-}exp(\text{-}x)]/2.$$

С учётом определённых постоянных интегрирования получаем окончательную форму решения (48)

$$\bar{u}(x,s) = \frac{2\,U}{s\cdot ch\left(L\sqrt{s/D}\right)}\exp\left(x\sqrt{\frac{s}{D}}\right)\exp\left(-L\sqrt{\frac{s}{D}}\right) +$$

$$+\frac{2\,U}{s\cdot ch\left(L\sqrt{s/D}\right)}\exp\left(-x\sqrt{\frac{s}{D}}\right)\exp\left(L\sqrt{\frac{s}{D}}\right).$$

После приведения в последнем соотношении (48) подобных получаем

$$\bar{u}(x,s) = \frac{2\,U}{s}\left\{\exp\left[(x-L)\sqrt{\frac{s}{D}}\right] + \exp\left[(L-x)\sqrt{\frac{s}{D}}\right]\right\}\Big/ ch\left(L\sqrt{\frac{s}{D}}\right).$$

В окончательном виде Лаплас-образ решения данной краевой задачи имеет вид

$$\bar{u}(x,s) = \frac{U}{s}\frac{ch\left[(L-x)\sqrt{s/D}\right]}{ch\left(L\sqrt{s/D}\right)}. \qquad (48a)$$

Далее с помощью обратного преобразования Лапласа можно найти оригинал функции (48*a*). Для этого необходимо вычислить интеграл

$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi\, i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\bar{u}(x,s)e^{st}d\,s,$$

где $i = \sqrt{-1}$. Интегрирование происходит в комплексной плоскости $s = \xi + i\eta$ вдоль прямой $\sigma$=*const*, параллельной мнимой оси. Действительные числа $\xi$ выбираются так, чтобы все особые точки подынтегрального выражения в обратном Лаплас-преобразовании лежали в левой полуплоскости комплексной плоскости. Оригинал для функции (48*a*) можно также определить, пользуясь соответствующими таблицами интегральных преобразований. Воспользовавшись таблицами данных преобразований, можно получить [5]

$$u(x,t)=U,\; u\left(x>0,t\right)=U\left\{1-\frac{2}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+0{,}5}\exp\left[\frac{\pi^2\left(n+0{,}5\right)^2Dt}{L^2}\right]\sin\left[\frac{\pi\left(n+0{,}5\right)x}{L}\right]\right\}.$$

Пример 8

В качестве второго примера применения интегрального преобразования рассмотрим применение преобразования Ханкеля к следующему параболическому уравнению

$$\frac{\partial u\left(r,t\right)}{\partial t}=D\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left[r\frac{\partial u\left(r,t\right)}{\partial r}\right]+g\left(r,t\right). \qquad (50)$$

с граничными и начальным условиями

$$u(r,0)=\chi(r),\; \left.\frac{\partial u\left(r,t\right)}{\partial r}\right|_{r=R}=0\,.$$

Далее применим конечное преобразование Ханкеля к правой и левой частям уравнения (50)

$$\int_0^R r\frac{\partial u\left(r,t\right)}{\partial t}J_0\left(pr\right)dr=D\int_0^R r\left\{\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left[r\frac{\partial u\left(r,t\right)}{\partial r}\right]\right\}J_0\left(pr\right)dr+\int_0^R rg\left(r,t\right)J_0\left(pr\right)dr\,.$$

Изменим порядок дифференцирования по переменной $t$ и интегрирования по переменной $r$, а также преобразуем первое слагаемое в правой части последнего уравнения

$$\frac{\partial\,\overline{u}\left(p,t\right)}{\partial t}+Dp^2\overline{u}\left(p,t\right)=\int_0^R rg\left(r,t\right)J_0\left(pr\right)dr\,, \qquad (51)$$

где $\overline{u}\left(p,t\right)=\int_0^R ru\left(r,t\right)J_0\left(pr\right)dr$ - прямое конечное преобразование Ханкеля. Обратное конечное преобразование Ханкеля определяется соотношением: $u\left(r,t\right)=$ $=\frac{2}{R^2}\sum_{n=1}^{\infty}\overline{u}\left(p_n,t\right)\frac{J_0\left(p_nr\right)}{J_0\left(p_nR\right)}+\frac{2}{K}\overline{u}\left(0,t\right)$. Решение уравнения в обыкновенных производных (51) имеет вид

$$\overline{u}\left(p,t\right)=\left[C\left(p\right)+\int_0^t e^{D\tau p^2}\int_0^R rg\left(r,t\right)J_0\left(pr\right)dr\,d\tau\right]e^{-Dtp^2}\,.$$

Для определения неизвестной пока функции $C(p)$ воспользуемся начальным условием. В данном случае можно записать $\overline{u}\left(p,0\right)=C\left(p\right)$. По определению образа имеем

$$\overline{u}\left(p,0\right)=\int_0^R ru\left(r,0\right)J_0\left(pr\right)dr\,,$$

т.е.

$$\bar{u}(p,0)=\int_0^R r\,\chi(r)J_0(p\,r)d\,r\,.$$

Тогда

$$C(p)=\int_0^R r\,\chi(r)J_0(p\,r)d\,r\,.$$

В окончательной форме решение уравнения (51) имеет вид

$$\bar{u}(p,t)=\left[\int_0^R r\,\chi(r)J_0(p\,r)d\,r+\int_0^t e^{D\tau p^2}\int_0^R r\,g(r,\tau)J_0(p\,r)d\,r\,d\,\tau\right]e^{-Dt\,p^2}\,.$$

Вычисление оригинала позволяет получить

$$u(r,t)=\frac{2}{R^2}\int_0^R r\,\chi(r)J_0(p\,r)d\,r+\frac{2}{R^2}\int_0^t \exp\left(D\tau\,p^2\right)\int_0^R r\,g(r,t)d\,r\,d\,\tau+\frac{2}{R^2}\sum_{n=1}^{\infty}e^{-Dt\,p_n^2}\times$$

$$\times\frac{J_0(p_n r)}{J_0^2(p_n R)}\int_0^R r\,\chi(r)J_0(p_n r)d\,r+\frac{2}{R^2}\sum_{n=1}^{\infty}e^{-Dt\,p_n^2}\frac{J_0(p_n r)}{J_0^2(p_n R)}\int_0^t e^{D\tau\,p_n^2}\int_0^R r\,g(r,\tau)J_0(p\,r)d\,r\,d\,\tau\,,$$

где $p$ – корень уравнения $\dfrac{d\,J_0(p\,r)}{d\,r}=0$.

### 3.4. Решение уравнений с частными производными с переменными коэффициентами

В данном разделе рассмотрим несколько методов решения уравнений в частных производных с переменными коэффициентами, применимых для всех типов уравнений. В качестве примера выберем параболическое уравнение с коэффициентом $D$, зависящим в общем случае как от переменной $x$, так и от переменной $t$, а также от решения уравнения $u(x,t)$

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left[D(x,t,u(x,t))\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right] \tag{52}$$

со следующими граничными и начальным условиями

$$\left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right|_{x=0}=\left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right|_{x=L}=0\,,\ u(x,0)=\chi(x).$$

Уравнение (52) в столь общем случае точного решения не имеет. На следующих примерах проиллюстрируем несколько приближённых методов решения.

Пример 9

В качестве первого примера рассмотрим систему из двух бесконечных цилиндров с коэффициентом $D(r,t)$, принимающим два значения: $D_1$ при $0\le r\le R_1$ и $D_2$ при $R_1\le r\le R_2$ для любого значения переменной $t$ (см. рис. 3). Обозначим температуру в каждом цилиндре аналогично $u_1(r,t)$ и $u_2(r,t)$ для $0\le r\le R_1$ и $R_1\le r\le R_2$. Рассмотрим теплообмен данной системы с окружающей средой при условии, что в начальный момент времени ($t=0$) температура в каждом цилиндре постоянна и равна $u_1(r,0)=u_2(r,0)=U_0$. Далее данную систему цилиндров помещают в среду с постоянной температурой $U_c$. При этом $U_c<U_0$. В данном случае изменение температуры в системе цилиндров описывается следующей системой уравнений

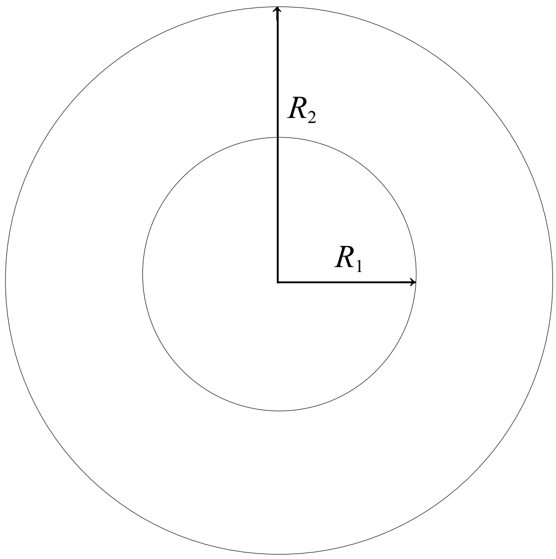


Рис. 3.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial T_1(r,t)}{\partial t} = \dfrac{D_1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\left[r\dfrac{\partial T_1(r,t)}{\partial r}\right], & 0 \le r \le R_1 \\ \dfrac{\partial T_2(r,t)}{\partial t} = \dfrac{D_2}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\left[r\dfrac{\partial T_2(r,t)}{\partial r}\right], & R_1 \le r \le R_2. \end{cases} \tag{53}$$

со следующими граничными и начальными условиями

$$u_1(r,0)=u_2(r,0)=T_0,\ u_1(R_1,t)=u_2(R_2,t),\ -D_1\left.\frac{\partial u_1(r,t)}{\partial r}\right|_{r=R_1} = -D_2\left.\frac{\partial u_2(r,t)}{\partial r}\right|_{r=R_1},$$

$$u_1(0,t)<\infty,\ -D_2\left.\frac{\partial u_2(r,t)}{\partial r}\right|_{r=R_2} + \alpha\left[U_1 - u_2(R_2,t)\right] = 0.$$

Для нахождения решения системы (53) воспользуемся преобразованием Лапласа. Тогда

$$\begin{cases} \dfrac{D_1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\left[r\dfrac{\partial Y_1(r,s)}{\partial r}\right] - sY_1(r,s) = -T_0, & 0 \le r \le R_1 \\ \dfrac{D_2}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\left[r\dfrac{\partial Y_2(r,s)}{\partial r}\right] - sY_2(r,s) = -T_0, & R_1 \le r \le R_2. \end{cases} \tag{53$a$}$$

$$u_1(0,s)<\infty,\ -D_2\left.\frac{\partial u_2(r,s)}{\partial r}\right|_{r=R_2} + \alpha\left[\frac{U_1}{s} - u_2(R_2,s)\right] = 0,\ u_1(R_1,s)=u_2(R_2,s),$$

$$-D_1\left.\frac{\partial u_1(r,s)}{\partial r}\right|_{r=R_1} = -D_2\left.\frac{\partial u_2(r,s)}{\partial r}\right|_{r=R_1}.$$

Подробно рассматривать решение уравнения (53*a*) и переход от Лаплас-образа к оригиналу не будем из-за большого объёма соотношений. Приведём лишь конечное решение уравнения (53). Оно может быть представлено в следующей форме

$$\begin{cases} u_1(r,t) = U_0 - (U_c - U_0)\sum\limits_{n=1}^{\infty} A_n J_0\left(\mu_n \dfrac{r}{R_1}\right)\exp\left(-\dfrac{\mu_n^2 D_1 t}{R_1^2}\right) \\ u_2(r,t) = U_0 - (U_c - U_0)\sum\limits_{n=1}^{\infty} A_n \exp\left(-\dfrac{\mu_n^2 D_2 t}{R_2^2}\right)\left\{J_0(\mu_n)\cos\left[\mu_n\sqrt{\dfrac{D_2}{D_1}}\left(\dfrac{r}{R_1}\right)-1\right] - \right. \\ \left. - J_1(\mu_n)\dfrac{\lambda_1}{\lambda_2}\sqrt{\dfrac{D_2}{D_1}}\sin\left[\mu_n\sqrt{\dfrac{D_2}{D_1}}\left(\dfrac{r}{R_1}\right)-1\right]\right\}, \end{cases}$$

где $\lambda_i$ и $D_i$ - коэффициенты теплопроводности и температуропроводности цилиндров, $\mu_n$ - корни уравнения

$$J_0(\mu)\left\{\frac{D_j R_j}{\lambda_j}\cos\left[\sqrt{\frac{D_1}{D_2}}\left(\frac{R_2}{R_1}-1\right)\right] - \mu\frac{R_2}{R_1}\sqrt{\frac{D_1}{D_2}}\sin\left[\mu\sqrt{\frac{D_1}{D_2}}\left(\frac{R_2}{R_1}-1\right)\right]\right\} - \tag{54}$$

$$-\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\sqrt{\frac{D_2}{D_1}}J_1(\mu)\left\{\frac{D_j R_j}{\lambda_j}\cos\left[\sqrt{\frac{D_1}{D_2}}\left(\frac{R_2}{R_1}-1\right)\right] + \mu\frac{R_2}{R_1}\sqrt{\frac{D_1}{D_2}}\sin\left[\mu\sqrt{\frac{D_1}{D_2}}\left(\frac{R_2}{R_1}-1\right)\right]\right\} = 0,$$

$$A_n = 2\frac{\lambda_1 D_j R_j}{\lambda_2\lambda_j}\sqrt{\frac{D_2}{D_1}}\left\{\mu_n\sqrt{D_1/D_2}\left(1-\frac{R_2}{R_1}\right) + \frac{D_j R_j}{\lambda_j} tg\left[\mu_n\sqrt{\frac{D_1}{D_2}}\left(1-\frac{R_2}{R_1}\right)\right]\right\} \times$$

$$\times\left(\left[\mu_n^2\frac{\lambda_1^2 D_2}{\lambda_2^2 D_1}\left(\frac{R_2}{R_1}-1\right)^2 + \frac{D_j^2 R_j^2}{\lambda_j^2}\right] ctg\left[\mu_n\left(\frac{R_2}{R_1}-1\right)\sqrt{\frac{D_1}{D_2}}\right] - 2\left[\mu_n^2\left(\frac{R_2}{R_1}-1\right)^2\frac{D_1}{D_2} + \right.\right.$$

$$\left. + \frac{D_j^2 R_j^2}{\lambda_j^2}\right]\lambda_1\left(1-\frac{R_2}{R_1}\right)\left\{\lambda_2\sqrt{\frac{D_1}{D_2}}\sin\left[2\mu_n\sqrt{\frac{D_1}{D_2}}\left(\frac{R_2}{R_1}-1\right)\right]\right\}^{-1} + tg\left[\mu_n\sqrt{\frac{D_1}{D_2}}\left(\frac{R_2}{R_1}-1\right)\right]\times$$

$$\times\left[\mu_n^2\frac{D_1}{D_2}\left(\frac{R_2}{R_1}-1\right)^2 + 2\left(\frac{R_2}{R_1}-1\right)\frac{\lambda_1 D_i R_i}{\lambda_2\lambda_i}\sqrt{\frac{D_2}{D_1}} + D_1 D_2\frac{R_i^2}{\lambda_2^2}\right] + 2\mu_n^2\left(\frac{R_2}{R_1}-1\right)^2\frac{\lambda_1}{\lambda_2} -$$

$$\left. - 2\mu_n\sqrt{\frac{D_1}{D_2}}\left(\frac{R_2}{R_1}-1\right)\frac{D_j R_j}{\lambda_j} - 2\mu_n R_j\frac{D_j\lambda_1^2}{\lambda_j\lambda_2^2}\left(1-\frac{R_2}{R_1}\right) - \sqrt{\frac{D_2}{D_1}}\frac{\lambda_1 D_j^2 R_j^2}{\lambda_2\lambda_j^2\mu_n}\right)^{-1} \times$$

$$\times\left\{\mu_n\sin\left[\mu_n\sqrt{D_1/D_2}\left(1-R_2/R_1\right)\right]\right\}^{-1}, j=1,2.$$

Недостатком данного метода решения является громоздкость преобразований при нахождении решения краевой задачи, необходимость решения трансцендентных уравнений типа уравнений (54) для определения постоянных интегрирования и необходимость не всегда приемлемой идеализации резкой границы между слоями.

Пример 10

Рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left\{D_L(x,t)\left[1+\mu\frac{u^\gamma(x,t)}{P^\gamma(x,t)}\right]\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right\} \tag{55}$$

с граничными и начальным условиями

$$\left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right|_{x=0}=\left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right|_{x=L}=0,\ u(x,0)=\chi(x).$$

В уравнении (55) $D_L(x,t)$, $P(x,t)$ и $\gamma$ - соответственно известные функции и параметр. Рассмотрим пока простейший случай равенства единице параметра $\gamma$. Далее представим функцию $D_L(x,t)$ в виде суммы её среднего значения $D_0$ и поправочной функции, учитывающей отличие функции $D_L(x,t)$ от её среднего значения, т.е.

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}=D_0\frac{\partial}{\partial x}\left\{\left[1+\varepsilon g(x,t)\right]\left[1+\mu\frac{u^\gamma(x,t)}{P^\gamma(x,t)}\right]\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right\}, \tag{55a}$$

где $0\le\varepsilon<1$, $|g(x,t)|\le 1$. Ограниченность по модулю произведения $|\varepsilon\cdot g(x,t)|<1$ является следствием физической реализуемости функции $D_L(x,t)$ (например, положительность коэффициента диффузии или температуропроводности). Далее будем искать решение уравнения (55*a*) в виде степенного ряда [6]

$$u(x,t)=\sum_{i=0}^{\infty}\varepsilon^i\sum_{j=0}^{\infty}\mu^j u_{ij}(x,t). \tag{56}$$

Подстановка предлагаемой формы решения в уравнение (55*a*) и приравнивание коэффициентов при одинаковых степенях параметров $\varepsilon$ и $\mu$ позволяет получить систему уравнений для функций $u_{ij}(x,t)$

$$\frac{\partial u_{00}(x,t)}{\partial t}=D_0\frac{\partial^2 u_{00}(x,t)}{\partial x^2},$$

$$\frac{\partial u_{10}(x,t)}{\partial t}=D_0\frac{\partial^2 u_{10}(x,t)}{\partial x^2}+D_0\frac{\partial}{\partial x}\left[g(x,t)\frac{\partial u_{00}(x,t)}{\partial x}\right],$$

$$\frac{\partial u_{01}(x,t)}{\partial t}=D_0\frac{\partial^2 u_{01}(x,t)}{\partial x^2}+D_0\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{u_{00}(x,t)}{P(x,t)}\frac{\partial u_{00}(x,t)}{\partial x}\right], \tag{57}$$

$$\frac{\partial u_{11}(x,t)}{\partial t}=D_0\frac{\partial^2 u_{11}(x,t)}{\partial x^2}+D_0\frac{\partial}{\partial x}\left[g(x,t)\frac{\partial u_{01}(x,t)}{\partial x}\right]+D_0\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{u_{00}(x,t)}{P(x,t)}\frac{\partial u_{10}(x,t)}{\partial x}\right]+$$

$$+D_0\frac{\partial^2 u_{11}(x,t)}{\partial x^2}+D_0\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{u_{10}(x,t)}{P(x,t)}\frac{\partial u_{00}(x,t)}{\partial x}\right]+D_0\frac{\partial}{\partial x}\left[g(x,t)\frac{u_{00}(x,t)}{P(x,t)}\frac{\partial u_{00}(x,t)}{\partial x}\right],$$

$$\frac{\partial u_{20}(x,t)}{\partial t}=D_0\frac{\partial^2 u_{20}(x,t)}{\partial x^2}+D_0\frac{\partial}{\partial x}\left[g(x,t)\frac{\partial u_{10}(x,t)}{\partial x}\right],$$

$$\frac{\partial u_{02}(x,t)}{\partial t}=D_0\frac{\partial^2 u_{02}(x,t)}{\partial x^2}+D_0\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{u_{00}(x,t)}{P(x,t)}\frac{\partial u_{01}(x,t)}{\partial x}\right]+D_0\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{u_{01}(x,t)}{P(x,t)}\frac{\partial u_{00}(x,t)}{\partial x}\right].$$

Подстановка ряда (56) в граничные и начальное условия для уравнения (55*a*) позволяет получить граничные и начальные условия для системы уравнений (57) в следующем виде

$$\left.\frac{\partial u_{ij}(x,t)}{\partial x}\right|_{x=0}=\left.\frac{\partial u_{ij}(x,t)}{\partial x}\right|_{x=L}=0,\ i\geq 0,\ j\geq 0;\ u_{00}(x,0)=\chi(x),\ u_{ij}(x,0)=0,\ i\geq 1,\ j\geq 1.$$

Таким образом, вместо исходного нелинейного уравнения (55) с зависящим от независимых переменных $x$ и $t$ коэффициентом $D$ получена система линейных неоднородных (за исключением уравнения для функции $u_{00}(x,t)$) уравнений с постоянным коэффициентом $D$. Решая уравнения системы (57) методом разделения переменных, получаем

$$u_{00}(x,t)=\frac{1}{L}\int_0^L\chi(x)\,dx+\frac{2}{L}\sum_{n=1}^{\infty}\cos\left(\frac{\pi n x}{L}\right)\exp\left(-\frac{\pi^2 n^2 D_0 t}{L^2}\right)\int_0^L\chi(v)\cos\left(\frac{\pi n v}{L}\right)dv,$$

$$u_{10}(x,t)=2\frac{D_0}{L^2}\sum_{m=1}^{\infty}m\cdot\int_0^t\exp\left(\frac{\pi^2 m^2 D_0\tau}{L^2}\right)\int_0^L g(v,\tau)\frac{\partial u_{00}(v,\tau)}{\partial v}\sin\left(\frac{\pi m v}{L}\right)dv\,d\tau\times$$

$$\times\cos\left(\frac{\pi m x}{L}\right)\cdot\exp\left(-\frac{\pi^2 m^2 D_0 t}{L^2}\right),$$

$$u_{01}(x,t)=2\frac{D_0}{L^2}\sum_{m=1}^{\infty}m\int_0^t\exp\left(\frac{\pi^2 m^2 D_0\tau}{L^2}\right)\int_0^L\frac{u_{00}(v,\tau)}{P(v,\tau)}\frac{\partial u_{00}(v,\tau)}{\partial v}\sin\left(\frac{\pi m v}{L}\right)dv\,d\tau\times$$

$$\times\cos\left(\frac{\pi m x}{L}\right)\exp\left(-\frac{\pi^2 m^2 D_0 t}{L^2}\right),$$

… … …

Подстановка нулевого приближения в поправочные функции $u_{10}(x,t)$ и $u_{01}(x,t)$ позволяет получить соотношения для них в явном виде

$$u_{10}(x,t)=2\pi\frac{D_0}{L^4}\sum_{m=1}^{\infty}m\cdot\sum_{n=1}^{\infty}n\cdot\cos\left(\frac{\pi m x}{L}\right)\int_0^t\exp\left[\left(m^2-n^2\right)\frac{\pi^2 D_0\tau}{L^2}\right]\int_0^L\cos\left(\frac{\pi n w}{L}\right)\times$$

$$\times\chi(w)\,dw\int_0^L g(v,\tau)\left\{\cos\left[\pi v\frac{m+n}{L}\right]-\cos\left[\pi v\frac{m-n}{L}\right]\right\}dv\,d\tau\cdot\exp\left(-\frac{\pi^2 m^2 D_0 t}{L^2}\right),$$

$$u_{01}(x,t)=2\pi\frac{D_0}{L^4}\sum_{m=1}^{\infty}m\cdot\sum_{n=1}^{\infty}n\cdot\cos\left(\frac{\pi m x}{L}\right)\exp\left(-\frac{\pi^2 m^2 D_0 t}{L^2}\right)\int_0^t\exp\left[\left(m^2-n^2\right)\frac{\pi^2 D_0\tau}{L^2}\right]\times$$

$$\times \int\limits_0^L \frac{1}{P(v,\tau)} \left\{ \cos\left[\pi v \frac{m+n}{L}\right] - \cos\left[\pi v \frac{m-n}{L}\right] \right\} \int\limits_0^L \chi(w) \cos\left(\frac{\pi n w}{L}\right) d\,w \left[ \int\limits_0^L \chi(w) d\,w + \right.$$

$$\left. + 2 \sum_{k=1}^{\infty} exp\left(-\frac{\pi^2 k^2 D_0 \tau}{L^2}\right) cos\left(\frac{\pi k v}{L}\right) \int\limits_0^L \chi(w) cos\left(\frac{\pi k w}{L}\right) d\,w \right] d\,v\,d\,\tau\,.$$

Решение следующих уравнений системы (57) позволяет увеличить точность аппроксимации решения уравнения (55). Следует заметить, что положительность коэффициента $D$ в уравнении (55) за счёт физических ограничений, а также способ введения параметра $\varepsilon$ и функции $g(x,t)$ приводят к сходимости ряда (56) по параметру $\varepsilon$.

Следует заметить, что методы решения уравнений в частных производных второго порядка могут быть использованы и для решения уравнений в частных производных более высоких порядков.

### 3.5. Решение нелинейных уравнений с частными производными

Пример 11

Рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla)\,\vec{v} = -\nabla\left(\frac{P}{\rho}\right) + \nu\,\Delta\vec{v}\,. \tag{58}$$

В данном уравнении введены следующие обозначения: $\vec{v}$ - скорость потока газа или жидкости, $P$ - давление газа или жидкости, $\rho$ - плотность, $\nu$ - кинематическая вязкость газа или жидкости, $\nabla$ - вектор Набла, $\Delta$ - оператор Лапласа. Рассмотрим уравнение (58) в цилиндрической системе координат. Тогда уравнения для проекций вектора скорости на соответствующие координатные оси имеют следующий вид

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \dfrac{\partial v_r}{\partial r} + \dfrac{v_\varphi}{r}\dfrac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + v_z \dfrac{\partial v_z}{\partial z} = \nu \left( \dfrac{\partial^2 v_r}{\partial r^2} + \dfrac{\partial^2 v_r}{\partial r \partial z} - \dfrac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} + \dfrac{\partial^2 v_z}{\partial r \partial z} \right) - \dfrac{\partial}{\partial r}\left(\dfrac{P}{\rho}\right) \\ \dfrac{\partial v_\varphi}{\partial t} + v_r \dfrac{\partial v_r}{\partial r} + \dfrac{v_\varphi}{r}\dfrac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + v_z \dfrac{\partial v_z}{\partial z} = \\ \qquad = \nu \left( \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial^2 v_r}{\partial r \partial \varphi} + \dfrac{2}{r^2}\dfrac{\partial^2 v_\varphi}{\partial \varphi^2} - \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 v_r}{\partial \varphi \partial z} + \dfrac{\partial^2 v_\varphi}{\partial z^2} \right) - \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial \varphi}\left(\dfrac{P}{\rho}\right) \\ \dfrac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \dfrac{\partial v_r}{\partial r} + \dfrac{v_\varphi}{r}\dfrac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + v_z \dfrac{\partial v_z}{\partial z} = \nu \left( \dfrac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} + \dfrac{\partial^2 v_z}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 v_z}{\partial \varphi^2} \right) - \dfrac{\partial}{\partial z}\left(\dfrac{P}{\rho}\right), \end{cases} \tag{59}$$

где $r\in[0,R]$ - радиальная координата ($R$ - радиус рассматриваемой области), $\varphi\in[0,2\pi]$ - угловая координата, $z\in[-L,L]$ - осевая координата. Будем считать, что при $z=0$ имеется тонкий диск, вращающийся с частотой $\omega$. Граничные и начальные условия из условия "прилипания" молекул на поверхности диска, однородности и одномерности потока на входе в зону реакции, а также его ламинарности могут быть представлены в следующей форме

$v_r(r,\varphi,-L,t)=0$, $v_r(r,\varphi,0,t)=0$, $v_r(r,\varphi,L,t)=0$, $v_r(r,0,z,t)=v_r(r,2\pi,z,t)$, $v_r(0,\varphi,z,t)\neq\infty$,

$$\left.\frac{\partial v_r(r,\varphi,z,t)}{\partial r}\right|_{r=0}=\left.\frac{\partial v_r(r,\varphi,z,t)}{\partial r}\right|_{r=R},\ \left.\frac{\partial v_\varphi(r,\varphi,z,t)}{\partial \varphi}\right|_{\varphi=0}=\left.\frac{\partial v_\varphi(r,\varphi,z,t)}{\partial \varphi}\right|_{\varphi=2\pi},\ v_r(r,\varphi,z,0)=0,$$

$$v_\varphi(r,\varphi,0,t)=\omega r,\ v_\varphi(r,\varphi,-L,t)=0,\ v_\varphi(r,\varphi,L,t)=0,\ v_\varphi(r,0,z,t)=v_\varphi(r,2\pi,z,t),\ v_\varphi(0,\varphi,z,t)\neq\infty,$$

$$v_z(r,\varphi,-L,0)=V_0,\ v_z(r,\varphi,-L,t)=V_0,\ v_z(r,\varphi,0,t)=0,\ v_z(r,\varphi,L,t)=0,\ v_z(r,0,z,t)=v_z(r,2\pi,z,t),$$

$$v_z(0,\varphi,z,t)\neq\infty,\ v_\varphi(r,\varphi,z,0)=0. \qquad (60)$$

Найдем решение данной системы уравнений с помощью метода осреднения функциональных поправок [7-9]. Следует заметить, что данный метод решения может быть использован как для решения дифференциальных уравнений, так и для решения интегральных уравнений. Решение интегральных уравнений методом осреднения функциональных поправок изложено в следующей главе. В рамках данного метода для определения первого приближения проекций скорости потока газовой смеси заменим их на пока неизвестные средние значения $v_r\to\alpha_{1r}$, $v_\varphi\to\alpha_{1\varphi}$, $v_z\to\alpha_{1z}$ в правой части уравнений системы (59). После такой подстановки получаем уравнения для первых приближений искомых компонент в следующей форме

$$\frac{\partial v_{1r}}{\partial t}=-\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{P}{\rho}\right),\ \frac{\partial v_{1\varphi}}{\partial t}=-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\frac{P}{\rho}\right),\ \frac{\partial v_{1z}}{\partial t}=-\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{P}{\rho}\right). \qquad (61)$$

Решения данных уравнений имеют следующий вид

$$v_{1r}=-\frac{\partial}{\partial r}\int\limits_0^t\frac{P}{\rho}d\tau,\ v_{1\varphi}=-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \varphi}\int\limits_0^t\frac{P}{\rho}d\tau,\ v_{1z}=-\frac{\partial}{\partial z}\int\limits_0^t\frac{P}{\rho}d\tau. \qquad (62)$$

Второе приближение проекций скорости может быть получено заменой искомых проекций в правой части уравнений системы (59) на суммы $v_r\to\alpha_{2r}+v_{1r}$, $v_\varphi\to\alpha_{2\varphi}+v_{1\varphi}$, $v_z\to\alpha_{2z}+v_{1z}$. Уравнения для данных проекций имеют вид

$$\frac{\partial v_{2r}}{\partial t}=\nu\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v_{1r}}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_{1r}}{\partial \varphi^2}+\frac{\partial^2 v_{1r}}{\partial z^2}\right]-\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{P}{\rho}\right)-$$

$$-(\alpha_{2r}+v_{1r})\frac{\partial v_{1r}}{\partial r}-\frac{(\alpha_{2\varphi}+v_{1\varphi})}{r}\frac{\partial v_{1r}}{\partial \varphi}-(\alpha_{2z}+v_{1z})\frac{\partial v_{1r}}{\partial z} \qquad (63а)$$

$$\frac{\partial v_{2r}}{\partial t}=\nu\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v_{1r}}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_{1r}}{\partial \varphi^2}+\frac{\partial^2 v_{1r}}{\partial z^2}\right]-\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{P}{\rho}\right)-$$

$$-(\alpha_{2r}+v_{1r})\frac{\partial v_{1r}}{\partial r}-\frac{(\alpha_{2\varphi}+v_{1\varphi})}{r}\frac{\partial v_{1r}}{\partial \varphi}-(\alpha_{2z}+v_{1z})\frac{\partial v_{1r}}{\partial z} \qquad (63б)$$

$$\frac{\partial v_{2\varphi}}{\partial t}=\nu\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v_{1\varphi}}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_{1\varphi}}{\partial \varphi^2}+\frac{\partial^2 v_{1\varphi}}{\partial z^2}\right]-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\frac{P}{\rho}\right)-$$

$$-\left(\alpha_{2r}+v_{1r}\right)\frac{\partial v_{1\varphi}}{\partial r}-\frac{\left(\alpha_{2\varphi}+v_{1\varphi}\right)}{r}\frac{\partial v_{1\varphi}}{\partial \varphi}-\left(\alpha_{2z}+v_{1z}\right)\frac{\partial v_{1\varphi}}{\partial z} \quad (63в)$$

Интегрирование данных уравнений приводит к следующему результату

$$v_{2r}=\nu\int_0^t\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v_{1r}}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_{1r}}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2 v_{1r}}{\partial z^2}\right]d\tau-\frac{\partial}{\partial r}\left(\int_0^t\frac{P}{\rho}d\tau\right)-$$

$$-\int_0^t\left(\alpha_{2r}+v_{1r}\right)\frac{\partial v_{1r}}{\partial r}d\tau-\int_0^t\frac{\left(\alpha_{2\varphi}+v_{1\varphi}\right)}{r}\frac{\partial v_{1r}}{\partial\varphi}d\tau-\int_0^t\left(\alpha_{2z}+v_{1z}\right)\frac{\partial v_{1r}}{\partial z}d\tau, \quad (63г)$$

$$v_{2\varphi}=\nu\int_0^t\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v_{1\varphi}}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_{1\varphi}}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2 v_{1\varphi}}{\partial z^2}\right]d\tau-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\int_0^t\frac{P}{\rho}d\tau\right)-$$

$$-\int_0^t\left(\alpha_{2r}+v_{1r}\right)\frac{\partial v_{1\varphi}}{\partial r}d\tau-\int_0^t\frac{\left(\alpha_{2\varphi}+v_{1\varphi}\right)}{r}\frac{\partial v_{1\varphi}}{\partial\varphi}d\tau-\int_0^t\left(\alpha_{2z}+v_{1z}\right)\frac{\partial v_{1\varphi}}{\partial z}d\tau, \quad (63д)$$

$$v_{2z}=V_0+\nu\int_0^t\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v_{1z}}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_{1z}}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2 v_{1z}}{\partial z^2}\right]d\tau-\frac{\partial}{\partial z}\left(\int_0^t\frac{P}{\rho}d\tau\right)-$$

$$-\int_0^t\left(\alpha_{2r}+v_{1r}\right)\frac{\partial v_{1z}}{\partial r}d\tau-\int_0^t\frac{\left(\alpha_{2\varphi}+v_{1\varphi}\right)}{r}\frac{\partial v_{1z}}{\partial\varphi}d\tau-\int_0^t\left(\alpha_{2z}+v_{1z}\right)\frac{\partial v_{1z}}{\partial z}d\tau. \quad (63е)$$

Средние значения $\alpha_{2r}$, $\alpha_{2\varphi}$, $\alpha_{2z}$ определим с помощью стандартного соотношения

$$\alpha_{2r}=\frac{1}{\pi\Theta R^2L}\int_0^\Theta\int_0^R r\int_0^{2\pi}\int_{-L}^{L}\left(v_{2r}-v_{1r}\right)dz\,d\varphi\,dr\,dt,$$

$$\alpha_{2\varphi}=\frac{1}{\pi\Theta R^2L}\int_0^\Theta\int_0^R r\int_0^{2\pi}\int_{-L}^{L}\left(v_{2\varphi}-v_{1\varphi}\right)dz\,d\varphi\,dr\,dt,$$

$$\alpha_{2z}=\frac{1}{\pi\Theta R^2L}\int_0^\Theta\int_0^R r\int_0^{2\pi}\int_{-L}^{L}\left(v_{2z}-v_{1z}\right)dz\,d\varphi\,dr\,dt, \quad (64)$$

где $\Theta$ - длительность наблюдения за потоком газа или жидкости. Подстановка первых двух приближений проекций скорости в соотношения (64) позволяет получить систему уравнений для искомых средних значений

$$\begin{cases}A_1\alpha_{2r}+B_1\alpha_{2\varphi}+C_1\alpha_{2z}=D_1\\ A_2\alpha_{2r}+B_2\alpha_{2\varphi}+C_2\alpha_{2z}=D_2\\ A_3\alpha_{2r}+B_3\alpha_{2\varphi}+C_3\alpha_{2z}=D_3\end{cases} \quad (65)$$

где $A_1=1+\int_0^\Theta(\Theta-t)\int_0^R r\int_0^{2\pi}\int_{-L}^{L}\frac{\partial v_{1r}}{\partial r}\,dz\,d\varphi\,dr\,dt$, $B_1=\int_0^\Theta(\Theta-t)\int_0^R\int_0^{2\pi}\int_{-L}^{L}\frac{\partial v_{1r}}{\partial\varphi}\,dz\,d\varphi\,dr\,dt$, $C_1=$ $=C_2=\frac{\pi}{2}\Theta^2R^2V_0$, $D_1=\nu\int_0^\Theta(\Theta-t)\int_0^R r\int_0^{2\pi}\int_{-L}^{L}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v_{1r}}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_{1r}}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2 v_{1r}}{\partial z^2}\right]dz\,d\varphi\,dr\,dt-$

$$-\frac{\pi}{8}\Theta^2R^2V_0^2-\int_0^{\Theta}(\Theta-t)\int_0^R r\int_0^{2\pi}\int_{-L}^{L}v_{1r}\frac{\partial v_{1r}}{\partial r}\,dz\,d\varphi\,dr\,dt-\int_0^{\Theta}(\Theta-t)\int_0^R\int_0^{2\pi}\int_{-L}^{L}v_{1\varphi}\frac{\partial v_{1r}}{\partial\varphi}\,dz\,d\varphi\,dr\,dt,$$

$$A_2=\int_0^{\Theta}(\Theta-t)\int_0^R r\int_0^{2\pi}\int_{-L}^{L}\frac{\partial v_{1r}}{\partial r}\,dz\,d\varphi\,dr\,dt,\ B_2=1+\int_0^{\Theta}(\Theta-t)\int_0^R\int_0^{2\pi}\int_{-L}^{L}\frac{\partial v_{1r}}{\partial\varphi}\,dz\,d\varphi\,dr\,dt,\ D_2=\nu\int_0^{\Theta}(\Theta-$$

$$-t)\int_0^R r\int_0^{2\pi}\int_{-L}^{L}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v_{1\varphi}}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_{1\varphi}}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2 v_{1\varphi}}{\partial z^2}\right]dz\,d\varphi\,dr\,dt-\frac{\pi}{8}\Theta^2R^2V_0^2-\int_0^{\Theta}(\Theta-t)\int_0^R\int_0^{2\pi}\int_{-L}^{L}\frac{\partial v_{1r}}{\partial r}\times$$

$$\times v_{1r}\,dz\,d\varphi\,r\,dr\,dt-\int_0^{\Theta}(\Theta-t)\int_0^R\int_0^{2\pi}\int_{-L}^{L}v_{1\varphi}\frac{\partial v_{1r}}{\partial\varphi}\,dz\,d\varphi\,dr\,dt,\ A_3=\int_0^{\Theta}\int_0^R r\int_0^{2\pi}\int_{-L}^{L}\frac{\partial v_{1z}}{\partial r}\,dz\,d\varphi\,dr\times$$

$$\times(\Theta-t)\,dt,\ B_3=\int_0^{\Theta}(\Theta-t)\int_0^R r\int_0^{2\pi}\int_{-L}^{L}\frac{\partial v_{1z}}{\partial\varphi}\,dz\,d\varphi\,dr\,dt,\ C_3=1+\frac{\pi}{2}\Theta^2R^2V_0,\ D_3=\nu\int_0^{\Theta}(\Theta-t)\times$$

$$\times\int_0^R r\int_0^{2\pi}\int_{-L}^{L}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v_{1z}}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_{1z}}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2 v_{1z}}{\partial z^2}\right]dz\,d\varphi\,dr\,dt-\int_0^{\Theta}(\Theta-t)\int_0^R r\int_0^{2\pi}\int_{-L}^{L}v_{1r}\frac{\partial v_{1z}}{\partial r}\,dz\,d\varphi\,dr\,dt-$$

$$-\int_0^{\Theta}(\Theta-t)\int_0^R r\int_0^{2\pi}\int_{-L}^{L}v_{1\varphi}\frac{\partial v_{1z}}{\partial\varphi}\,dz\,d\varphi\,dr\,dt-\frac{\pi}{8}\Theta^2R^2V_0^2.$$

Решение данной системы определяются стандартными методами [2] и представимо в следующей форме

$$\alpha_{2r}=\Delta_r/\Delta,\ \alpha_{2\varphi}=\Delta_\varphi/\Delta,\ \alpha_{2z}=\Delta_z/\Delta,$$

$$\alpha_{2r}=\Delta_r/\Delta,\ \alpha_{2\varphi}=\Delta_\varphi/\Delta,\ \alpha_{2z}=\Delta_z/\Delta, \tag{11}$$

где $\Delta=A_1(B_2C_3-B_3C_2)-B_1(A_2C_3-A_3C_2)+C_1(A_2B_3-A_3B_2)$, $\Delta_r=D_1(B_2C_3-B_3C_2)-B_1(D_2C_3-D_3C_2)+C_1(D_2B_3-D_3B_2)$, $\Delta_\varphi=A_1(D_2C_3-D_3C_2)-D_1(A_2C_3-A_3C_2)+C_1(A_2D_3-A_3D_2)$, $\Delta_z=A_1(B_2D_3-B_3D_2)-B_1(A_2D_3-A_3D_2)+D_1(A_2B_3-A_3B_2)$.

# Раздел 4. Решение интегральных уравнений

## 4.1. *Метод Бубнова-Галеркина*

Первым рассмотрим метод Бубнова-Галеркина на примере решения уравнения Фредгольма второго рода [1]

$$y(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t)\, y(t)\, dt, \tag{6б}$$

Выберем систему функций $\{z_n(x)\}$, полную на $[a,b]$ и такую, что при любом $n$ функции $z_1(x)$, $z_2(x)$, …, $z_n(x)$ линейно независимы, и ищем приближенное решение $y_n(x)$ в виде следующего ряда

$$y_n(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i z_i(x). \tag{58}$$

Коэффициенты $a_i$ ($i$=1, 2, …, $n$) определяется путем решения следующей системы уравнений

$$\int_a^b y_n(x) z_i(x)\, dx = \int_a^b f(x) z_i(x)\, dx + \lambda \int_a^b z_i(x) \int_a^b K(x,t)\, y_n(t)\, dt\, dx,$$

где $i$=1, 2, …, $n$, вместо $y_n(x)$ необходимо подставить $\sum_{i=1}^{n} a_i z_i(x)$.

Пример 11

Решим методом Бубнова-Галеркина следующее уравнение

$$y(x) = x + \int_{-1}^{1} x\, t\, y(t)\, dt. \tag{6в}$$

В качестве полной системы функций на [-1,1] выберем систему полиномов Лежандра $P_i(x)$ ($i$=0, 1, 2, …, $n$). Приближенное решение $y_n(x)$ уравнения (6*в*) будем искать в виде

$$y_n(x)=a_1\cdot 1+a_2\cdot x+a_3\cdot(3x^2-1)/2.$$

Подставляя $y_3(x)$ вместо $y(x)$ в уравнение (6*в*), получаем

$$a_1 + a_2 x + a_3 \frac{3x^2-1}{2} = x + \int_{-1}^{1} xt \left( a_1 + a_2 t + a_3 \frac{3t^2-1}{2} \right) dt.$$

Вычисление интеграла в правой части данного уравнения позволяет преобразовать его к следующей форме

$$a_1 + a_2 x + a_3 \frac{3x^2-1}{2} = x + a_2 x \frac{2}{3}.$$

Умножая обе части данного уравнения последовательно на 1, $x$ и $(3x^2-1)/2$ и интегрируя в пределах от –1 до 1, получаем систему уравнений для определения коэффициентов $a_1$, $a_2$ и $a_3$

$$a_1-a_3/2=0,\ a_2/3=1,\ 3a_3/2=0.$$

Отсюда получаем, что $a_1=0$, $a_2=3$, $a_3=0$. Тогда $y_3(x)=3x$. Подстановка полученного решения в исходное уравнение (6*в*) показывает, что получено точное решение данного уравнения.

### 4.2. *Метод осреднения функциональных поправок*

Рассмотрим следующее линейное однородное параболическое уравнение с переменным коэффициентом $D(x,t)$

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left[D(x,t)\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right] \tag{55б}$$

и следующими граничными и начальным условиями

$$u(x,0)=\chi(x),\ u(0,t)=0,\ \left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right|_{x=L}=0\,.$$

Искомая функция $u(x,t)$ определяется в области $G$: $0\le x\le L$, $0\le t<\infty$.

Поставим в соответствие дифференциальному уравнению (55*б*) эквивалентное ему интегральное. Для этого проинтегрируем левую и правую часть уравнения (55*б*) по переменной $t$ с учётом начального условия

$$u(x,t)=\frac{\partial}{\partial x}\left[\int_0^t D(x,\tau)\frac{\partial u(x,\tau)}{\partial x}d\tau\right]+\chi(x).$$

Далее дважды интегрируем полученное уравнение по переменной $x$. После каждого интегрирования с учётом граничных условий соответственно получаем

$$\int_L^x u(v,t)dv=\int_0^t D(x,\tau)\frac{\partial u(x,\tau)}{\partial x}d\tau+\int_L^x \chi(v)dv$$

и

$$\int_0^x\int_L^w u(v,t)dv\,dw=\int_0^t\int_0^x D(v,\tau)\frac{\partial u(v,\tau)}{\partial v}dv\,d\tau+\int_0^x\int_L^w \chi(v)dv\,dw\,.$$

Интегрирование по частям упрощает последнее уравнение

$$\int_0^x (x-v)u(v,t)dv-x\int_0^L u(v,t)dv-\int_0^t D(x,\tau)u(x,\tau)d\tau=$$

$$=\int_0^x (x-v)\chi(v)dv-x\int_0^L \chi(v)dv\,. \tag{59}$$

Данное уравнение является уравнением смешанного типа. Оно имеет слагаемые, соответствующие и уравнению Вальтера, и уравнению Фредгольма первого рода. Далее преобразуем уравнение (59) к следующей форме

$$u(x,t)=u(x,t)+\frac{1}{L^2}\left[\int_0^x (x-v)\chi(v)dv-x\int_0^L \chi(v)dv-\int_0^x (x-v)u(v,t)dv+\right.$$

$$\left.+\,x\int_0^L u(v,t)dv+\int_0^t D(x,\tau)u(x,\tau)\,d\tau\right]. \tag{59а}$$

Для нахождения решения данного уравнения заменим искомую функцию $u(x,t)$ на ее пока неизвестное среднее значение $\alpha_1$ [7,8]. Таким образом, мы получили первое приближение искомой функции $u_1(x,t)$

$$u_1(x,t)=\alpha_1 +$$
$$+\frac{1}{L^2}\left[\int_0^x (x-v)\chi(v)d\,v - x\int_0^L \chi(v)d\,v - \alpha_1\frac{x^2}{2}+\alpha_1 x L+\alpha_1\int_0^t D(x,\tau)d\,\tau\right]. \qquad (60)$$

Среднее значение первого приближения искомой функции $u_1(x,t)$ определяется с помощью стандартного соотношения

$$\alpha_1 = \frac{1}{\Theta L}\int_0^\Theta\int_0^L u_1(x,t)\,d\,x\,d\,t\,, \qquad (61)$$

где $\Theta$ - длительность наблюдения за изменением функции $u_1(x,t)$ во времени.

Подстановка функции $u_1(x,t)$ в соотношение (61) позволяет получить уравнение для нахождения среднего значения $\alpha_1$

$$\int_0^\Theta\int_0^L\int_0^x (x-v)\chi(v)d\,v\,d\,x\,d\,t - \int_0^\Theta\int_0^L x\int_0^L \chi(v)d\,v\,d\,x\,d\,t - \frac{\alpha_1}{2}\int_0^\Theta\int_0^L x^2 d\,x\,d\,t + \alpha_1 L\int_0^\Theta\int_0^L x\,d\,x\,d\,t +$$
$$+\alpha_1\int_0^\Theta\int_0^L\int_0^t D(x,\tau)d\,\tau\,d\,x\,d\,t = 0\,.$$

Интегрирование по частям, а также табличное интегрирование позволяет упростить данное уравнение

$$\frac{1}{2}\int_0^\Theta\int_0^L (L+x)^2\chi(x)d\,x\,d\,t - L^2\frac{\Theta}{2}\int_0^L \chi(v)d\,v - \alpha_1 L^3\frac{\Theta}{4}+\alpha_1 L^3\frac{\Theta}{2}+$$
$$+\alpha_1\int_0^\Theta(\Theta-t)\int_0^L D(x,t)d\,x\,d\,t = 0\,.$$

Решение данного уравнения представимо в следующей форме

$$\alpha_1 = \left[L^2\frac{\Theta}{2}\int_0^L\chi(v)d\,v - \frac{1}{2}\int_0^\Theta\int_0^L (L+x)^2\chi(x)d\,x\,d\,t\right]\Bigg/\left[L^3\frac{\Theta}{4}+\int_0^\Theta(\Theta-t)\int_0^L D(x,t)d\,x\,d\,t\right].$$

Второе приближение искомой функции определим в рамках стандартной процедуры метода осреднения функциональных поправок [7,8], т.е. путем замены искомой функции $u(x,t)$ в правой части уравнения (59*a*) на сумму $\alpha_2+u_1(x,t)$, т.е.

$$u_2(x,t)=\alpha_2+u_1(x,t)+\frac{1}{L^2}\left\{\int_0^x (x-v)\chi(v)d\,v - x\int_0^L\chi(v)d\,v - \int_0^x[\alpha_2+u_1(v,t)]\times\right.$$
$$\left.\times(x-v)d\,v + x\int_0^L[\alpha_2+u_1(v,t)]d\,v + \int_0^t D(x,\tau)[\alpha_2+u_1(v,\tau)]\,d\,\tau\right\}. \qquad (62)$$

Для определения среднего значения $\alpha_2$ второго приближения искомой функции $u_2(x,t)$ используем стандартное для метода осреднения соотношение [6,7]

$$\alpha_2 = \frac{1}{\Theta L}\int_0^\Theta\int_0^L \left[u_2(x,t) - u_1(x,t)\right] d\,x\,d\,t\,. \tag{63}$$

Подстановка соотношений (60) и (62) в соотношение (63) позволяет получить уравнение для нахождения среднего значения $\alpha_2$

$$\int_0^\Theta\int_0^L\int_0^x (x-v)\chi(v)d\,v\;d\,x\,d\,t - \int_0^\Theta\int_0^L\int_0^x (x-v)\left[\alpha_2 + u_1(v,t)\right]d\,v\,d\,x\,d\,t - \int_0^\Theta\int_0^L\int_0^L \chi(v)d\,v \times$$

$$\times\, x\,d\,x\,d\,t + \int_0^\Theta\int_0^L x\int_0^L \left[\alpha_2 + u_1(v,t)\right]d\,v\;d\,x\,d\,t + \int_0^\Theta\int_0^L\int_0^t D(x,\tau)\left[\alpha_2 + u_1(x,\tau)\right]d\,\tau\,d\,x\,d\,t = 0\,.$$

Интегрирование по частям и табличное интегрирование позволяют упростить полученное соотношение

$$\frac{1}{2}\int_0^\Theta\int_0^L (L+x)^2\chi(x)\,d\,x\,d\,t - \frac{1}{2}\int_0^\Theta\int_0^L (L+x)^2\left[\alpha_2 + u_1(x,t)\right]d\,x\,d\,t - \Theta\frac{L^2}{2}\int_0^L \chi(x)d\,x +$$

$$+\frac{L^2}{2}\int_0^\Theta\int_0^L \left[\alpha_2 + u_1(x,t)\right]d\,x\,d\,t + \int_0^\Theta (\Theta - t)\int_0^L D(x,t)\left[\alpha_2 + u_1(x,t)\right]d\,x\,d\,t = 0\,.$$

Решая данное уравнение, получаем среднее значение $\alpha_2$ второго приближения $u_2(x,t)$ искомой функции $u(x,t)$

$$\alpha_2 = \left[\frac{1}{2}\int_0^\Theta\int_0^L (L+x)^2 u_1(x,t)d\,x\,d\,t + \Theta\frac{L^2}{2}\int_0^L \chi(x)d\,x - \frac{1}{2}\int_0^\Theta\int_0^L (L+x)^2\chi(x)\,d\,x\,d\,t - \right.$$

$$\left. - \frac{L^2}{2}\int_0^\Theta\int_0^L u_1(x,t)d\,x\,d\,t - \int_0^\Theta (\Theta - t)\int_0^L D(x,t)u_1(x,t)d\,x\,d\,t\right]\left[\int_0^\Theta (\Theta - t)\int_0^L D(x,t)d\,x\,d\,t - \right.$$

$$\left. - 2L^3\Theta/3\right]^{-1}.$$

Приближения $u_n(x,t)$ искомой функции $u(x,t)$ более высокого порядка ($n =$ 3, 4, …) могут быть получены аналогично второму приближению функции $u(x, t)$, т.е. ее заменой за сумму $\alpha_n + u_{n-1}(x,t)$.

Количество итерационных шагов метода осреднения может быть уменьшено при сохранении точности решения уравнения. Для этого выберем более точное исходное приближение. В качестве более точного приближения выберем решение исходной краевой задачи при усредненном коэффициенте $D(x,t)$. Его среднее значение обозначим как $D_0$. Соответствующее ситуации $D(x,t) = D_0$ решение имеет вид [9]

$$u_0(x,t) = \frac{1}{L}\int_0^L \chi(x)d\,x +$$

$$+\frac{2}{L}\sum_{n=1}^{\infty}\cos\left(\frac{\pi\,n\,x}{L}\right)\exp\left(-\frac{\pi^2 n^2 D_0 t}{L^2}\right)\int_0^L \chi(v)\cos\left(\frac{\pi\,n\,v}{L}\right)d\,v\,. \tag{64}$$

Подстановка данного приближения в уравнение (59*a*) позволяет получить первое приближение данного уравнения в следующей форме

$$u_1(x,t)=\frac{1}{L}\int_0^L \chi(x)dx+\frac{2}{L}\sum_{n=1}^{\infty}\cos\left(\frac{\pi n x}{L}\right)\exp\left(-\frac{\pi^2 n^2 D_0 t}{L^2}\right)\int_0^L \chi(v)\cos\left(\frac{\pi n v}{L}\right)dv+$$

$$+\frac{1}{L^2}\left\{x\int_0^L \chi(x)dx+2\frac{xL}{\pi L}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right)\exp\left(-\frac{\pi^2 n^2 D_0 t}{L^2}\right)\int_0^L \chi(v)\cos\left(\frac{\pi n v}{L}\right)dv-\right.$$

$$-\frac{x^2}{2L}\int_0^L \chi(x)dx-\frac{2L}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\cos\left(\frac{\pi n x}{L}\right)\exp\left(-\frac{\pi^2 n^2 D_0 t}{L^2}\right)\int_0^L \chi(v)\cos\left(\frac{\pi n v}{L}\right)dv+$$

$$+\frac{1}{L}\int_0^L \chi(x)dx\int_0^t D(x,\tau)d\tau+\frac{2}{L}\sum_{n=1}^{\infty}\cos\left(\frac{\pi n x}{L}\right)\int_0^t D(x,\tau)\exp\left(-\frac{\pi^2 n^2 D_0 \tau}{L^2}\right)d\tau\times$$

$$\left.\times\int_0^L \chi(x)\cos\left(\frac{\pi n x}{L}\right)dx+\int_0^x (x-v)\chi(v)dv-x\int_0^L \chi(v)dv\right]. \tag{65}$$

Приближения более высоких порядков могут быть получены в рамках стандартной итерационный процедуры.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В рамках данного учебного пособия рассмотрен ряд методов решения дифференциальных с частными производными и их интегральных аналогов. Некоторые из них позволяют решать линейные уравнения с постоянными коэффициентами. Другие из них позволяют решать нелинейные дифференциальные и интегральные уравнения с коэффициентами, распределенными как в пространстве, так и во времени. Проведено сравнение нескольких альтернативных методов из второй группы. Обсуждались их достоинства и недостатки. В конце пособия приведен список литературы, в котором рассмотренные здесь методы обсуждаются более подробно.

# КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ

1. Найти решения дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка

1.01 $\frac{1}{x^5}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{y^7}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{1}{z^4}\frac{\partial u}{\partial z}=0$;

1.02 $\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{ctg(y)}\frac{\partial u}{\partial y}+tg\,(z)\frac{\partial u}{\partial z}=0$;

1.03 $\frac{1}{\ln(x)}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{ch(y)}\frac{\partial u}{\partial y}+e^{z}\frac{\partial u}{\partial z}=0$;

1.04 $\frac{1}{\sin(x)}\frac{\partial u}{\partial x}+2\frac{\partial u}{\partial y}+3\frac{\partial u}{\partial z}=0$;

1.05 $\frac{1}{\ln(x)}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{y^2}\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{u}{2\cdot x\cdot y}$;

1.06 $\frac{\ln(x)}{x}\frac{\partial u}{\partial x}+e^{y}\frac{\partial u}{\partial y}+2z\frac{\partial u}{\partial z}=0$;

1.07 $2\frac{\partial u}{\partial x}+ye^{y^2}\frac{\partial u}{\partial y}=2x^2u\cdot tg(y)$;

1.08 $\frac{1}{x^2\ln(x^3)}\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}=u\cdot th(y)$;

1.09 $x\cdot y^2\frac{\partial u}{\partial x}+x^5\cdot y^3\frac{\partial u}{\partial y}+tg(z)\frac{\partial u}{\partial z}=0$;

1.10 $e^{2x}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\ln^2(y)}{y}\frac{\partial u}{\partial y}+cth(z)\frac{\partial u}{\partial z}=0$;

1.11 $2x\frac{\partial u}{\partial x}+y^2\sin(y)\frac{\partial u}{\partial y}=x\cdot\ln(u)$;

1.12 $\frac{\partial u}{\partial x}+th(y)\frac{\partial u}{\partial y}+cth(z)\frac{\partial u}{\partial z}=0$;

1.13 $y\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\ln(1+x^2)}{x}\frac{\partial u}{\partial y}+z\frac{\partial u}{\partial z}=0$;

1.14 $x^3\frac{\partial u}{\partial x}+5y^8\frac{\partial u}{\partial y}+z\frac{\partial u}{\partial z}=0$;

1.15 $\sin^2(x)\frac{\partial u}{\partial x}+\cos^2(y)\frac{\partial u}{\partial y}+3\frac{\partial u}{\partial z}=0$;

1.16 $\cos^2(x)\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{\ln(y)}\frac{\partial u}{\partial y}+sh^2(z)\frac{\partial u}{\partial z}=0$;

1.17 $\frac{1}{x}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{y^2e^{y}}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{1}{z}\frac{\partial u}{\partial z}=0$;

1.18 $tg^3(x)\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}+2z^4\frac{\partial u}{\partial z}=0$;

1.19 $\frac{e^{x^3}}{x^2}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{y^4}{5}\frac{\partial u}{\partial y}=u$;

1.20 $\frac{tg(x)}{\sin(2x)}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{y^3}{\ln(y^{-2})}\frac{\partial u}{\partial y}=2u$;

1.21 $\frac{\cos^2(x)-\sin^2(x)}{\sin(2x)}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{y}{7}\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{u}{3}$;

1.22 $x\frac{\partial u}{\partial x}+\sin^2(3y)\frac{\partial u}{\partial y}=u$;

1.23 $\frac{x^2}{3}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\cos^2(y^2)}{y}\frac{\partial u}{\partial y}=u$;

1.24 $tg(x)\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{\sin(y)}\frac{\partial u}{\partial y}=u$;

1.25 $ctg^3(x)\frac{\partial u}{\partial x}+y^3\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\ln(z)}{z}\frac{\partial u}{\partial z}=0$;

1.26 $\frac{1}{\ln(x)}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{e^{y^3}}{y^2}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\ln^4(z)}{z}\frac{\partial u}{\partial z}=0$;

1.27 $tg^5(x)\frac{\partial u}{\partial x}+2y^2\frac{\partial u}{\partial y}+sh^2(z)\frac{\partial u}{\partial z}=0$;

1.28 $\frac{1}{x\cdot\ln(x)}\frac{\partial u}{\partial x}+\sqrt{1-y^2}\frac{\partial u}{\partial y}+3\frac{\partial u}{\partial z}=0$;

1.29 $\frac{1}{x\cdot\ln(x^2)}\frac{\partial u}{\partial x}+\sqrt{1+y^2}\frac{\partial u}{\partial y}+3z\frac{\partial u}{\partial z}=0$;

1.30 $\frac{1}{1+x^2}\frac{\partial u}{\partial x}+(1+y^2)\frac{\partial u}{\partial y}+3z^2\frac{\partial u}{\partial z}=0$.

2. Найти решения дифференциального уравнения $\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}=D\frac{\partial^2u(x,t)}{\partial x^2}+g(x,t)$

с граничными и начальным условиями $u(x,0)=\chi(x)$, $u(0,t)=0$, $u(L,t)=0$ при

| | | |
|---|---|---|
| 1.01 $\chi(x)=a\cdot x+b$, $g(x,t)=c\cdot x\cdot t$; | 1.02 $\chi(x)=a\cdot sin(b\cdot x)$, $g(x,t)=c\cdot x^2\cdot t^2$; | 1.03 $\chi(x)=a\cdot x^2+b$, $g(x,t)=c\cdot e^{-b\cdot x\cdot t}$; |
| 1.04 $\chi(x)=a$, $g(x,t)=b\cdot sin(\omega\cdot t)$; | 1.05 $\chi(x)=a\ cos(b\cdot x)$, $g(x,t)=c\cdot cos(\omega x)$; | 1.06 $\chi(x)=a\cdot e^{-b\cdot x}$, $g(x,t)=c\cdot x\cdot ch(c\cdot t)$; |
| 1.07 $\chi(x)=a\cdot sh(b\cdot x)$, $g(x,t)=c\cdot cos(\omega\cdot t)$; | 1.08 $\chi(x)=a\cdot ch(b\cdot x)$, $g(x,t)=c\cdot x^2\cdot t$; | 1.09 $\chi(x)=a\cdot x^2+b\cdot x+c$, $g(x,t)=d\cdot x\cdot t^2$; |
| 1.10 $\chi(x)=a\cdot x+b$, $g(x,t)=c\cdot x\cdot t$; | 1.11 $\chi(x)=a\cdot e^{-b\cdot x}$, $g(x,t)=c\cdot cos(dx+et)$; | 1.12 $\chi(x)=a\cdot e^{-b\cdot x}$, $g(x,t)=c\cdot x\cdot sh(c\cdot t)$; |
| 1.13 $\chi(x)=a\cdot x+b$, $g(x,t)=c\cdot e^{-d\cdot x\cdot t}+e$; | 1.14 $\chi(x)=a\cdot sh(b\cdot x)$, $g(x,t)=c\cdot cos(dx+et)$; | 1.15 $\chi(x)=a\cdot x^2+b\cdot x+c$, $g(x,t)=c\cdot cos(dx)$; |
| 1.16 $\chi(x)=a$, $g(x,t)=b\cdot cos(c\,x)$; | 1.17 $\chi(x)=a\cdot e^{-b\cdot x}$, $g(x,t)=c$; | 1.18 $\chi(x)=a\cdot ch(b\cdot x)$, $g(x,t)=c\cdot sin(d\,t)$; |
| 1.19 $\chi(x)=a\ cos(b\cdot x+c)$, $g(x,t)=c\cdot e^{-d\cdot x}cos(e\,t)$; | 1.20 $\chi(x)=a\ sin(b\cdot x+c)$, $g(x,t)=c\cdot e^{-d\cdot x}sin(d\,t)$; | 1.21 $\chi(x)=a$, $g(x,t)=c\cdot e^{-b\cdot x\cdot t}$; |
| 1.22 $\chi(x)=a\cdot e^{-b\cdot x}$, $g(x,t)=c\cdot x^2\cdot t^3$; | 1.23 $\chi(x)=a\cdot x^2+b\cdot x+c$, $g(x,t)=c\cdot x^3\cdot t^2$; | 1.24 $\chi(x)=a\cdot x^2+b\cdot x+c$, $g(x,t)=c\cdot x^3\cdot t^2$; |
| 1.25 $\chi(x)=a\cdot e^{-b\cdot x}$, $g(x,t)=c\cdot e^{-d\cdot x}$; | 1.26 $\chi(x)=a\cdot sh(b\cdot x)$, $g(x,t)=c\cdot e^{-d\cdot x\cdot t}$; | 1.27 $\chi(x)=a\cdot ch(b\cdot x)$, $g(x,t)=c\cdot e^{-d\cdot t}$; |
| 1.28 $\chi(x)=a$, $g(x,t)=b\cdot e^{-c\cdot x}cos(d\,t)$; | 1.29 $\chi(x)=a$, $g(x,t)=b\cdot e^{-c\cdot x}sin(d\,t)$; | 1.30 $\chi(x)=a\cdot cos(b\,x)$, $g(x,t)=b\cdot sh(d\,t)$; |

Параметры $a$, $b$, $c$, $d$ и $e$ считать постоянными.

3. Найти решения дифференциального уравнения $\dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = D\dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + g(x,t)$

с граничными и начальным условиями $\left.\dfrac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right|_{x=0} = \left.\dfrac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right|_{x=L} = 0$, $u(x,0)=\chi_1(x)$,

$\left.\dfrac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right|_{x=0} = \chi_2(x)$. В качестве функции $g(x,t)$ взять функцию $g(x,t)$ из предыдущего задания, а функции $\chi_1(x)$ и $\chi_2(x)$ считать одинаковыми и равными функции $\chi(x)$ из предыдущего задания.

# ЛИТЕРАТУРА

1. М.Л. Краснов, А.И. Киселев, Г.И. Макаренко. Интегральные уравнения. – М.: Наука, 1976. - 215 с.
2. Г. Корн, Т. Корн. Справочник по математике для научных работников и инженеров. - М.: Наука, 1974. – 831 с.
3. Э. Камке. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. - М.: Наука, 1971. - 576 с.
4. А.Н. Тихонов, А.А. Самарский. Уравнения математической физики. - М.: Наука, 1972. – 735 с.
5. Г. Бейтмен, А. Эрдейи, В. Магнус, Ф. Оберхеттингер, Ф. Трикоми. Таблицы интегральных преобразований. Т.1. Преобразования Фурье, Лапласа, Меллина. - М.: Наука, 1969. - 343 с.
6. E.L. Pankratov. Influence of spatial, temporal and concentrational dependence of diffusion coefficient on dopant dynamics: Optimization of annealing time. // Physical Review B. - 2005. - Vol. 72, №7. - P. 075201-075208.
7. Ю.Д. Соколов. Об определении динамических усилий в шахтных подъёмных канатах. // Прикладная механика. - 1955. - Т.1, №1. С. 23-35.
8. А.Ю. Лучка. Теория и применение метода осреднения функциональных поправок. – Киев: Издательство АН УССР. 1963. – 128 с.
9. E.L. Pankratov. Dynamics of delta-dopant redistribution during growth of heterostructure. // The European Physical Journal B. - 2007. – Vol. 57, № 3. P 251-256.

**НЕКОТОРЫЕ АНАЛИТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ**

Автор:
Евгений Леонидович **Панкратов**

***Учебно-методическое пособие***

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского».
603950, Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23.